第十七周习题

1. 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中 $\mathbf{u}_1=(1,0,0,1)^t, \mathbf{u}_2=(1,1,0,-1)^t$. 计算: $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle^\perp$ 的一组基.

2. 设标准欧式 $\mathbb{R}^5$ 中的子空间 U 是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

   对应的齐次线性方程组的解空间. 计算 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

3. U_1, U_2 是 V 的子空间. 证明: $(U_1\cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

4. 设 $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   (i) 证明: 如果 A 的列向量 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 作为标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量是两两正交的单位向量, 则 A 的行向量 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_n$ 作为标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的向量是两两正交的单位向量.

   (ii) 列向量 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 作为标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量两两正交, 能否推出行向量 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_n$ 作为标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的向量两两正交?

   注. 标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中两个向量 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ 和 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ 的内积是

$$x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

5. (选做) 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\in V$. 证明下列断言等价:

   (i) $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基;

   (ii) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\sum_{i=1}^n(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{y}|\mathbf{e}_i)$;

   (iii) 对任意 $\mathbf{x}\in V$, $\|\mathbf{x}\|^2=\sum_{i=1}^n(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)^2$.