第十八周习题

记号. 下列题中 V 是有限维欧式空间.

1. 设
$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
计算正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

2. 设实对称矩阵
$$A_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\cdots&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\cdots&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&1&-\frac{1}{4}&\cdots&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&1&\cdots&-\frac{1}{4}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\cdots&1\end{pmatrix}.$$
计算 A_n 的签名.

3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 是正规算子. 证明:
   (i) $\ker(\mathcal{A})^{\perp}=\operatorname{im}(\mathcal{A})$;
   (ii) $\operatorname{im}(\mathcal{A})=\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$.

4. 设 A 是斜对称实矩阵. 证明: A^2 对称且半负定.

5. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 是正定算子. 证明: 如果 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, 则 $\mathcal{AB}$ 也是正定算子. (提示: 利用第二章第五次习题课例 3.1)

6. (选做) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 是对称算子. 证明: 如果 $\mathcal{A}$ 正定, 则 $\mathcal{AB}$ 的特征根都是实数. (并非提示: 科斯特利金书上第 311 页的提示后半部分令我恍惚)