期中大作业

1. (15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中两组向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) 验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基.

(ii) 计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)P$.

(iii) 设 $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$. 计算 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

解. (i) 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 和 $B = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$. 直接计算得 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 3$. 因为 A 和 B 都可逆, 所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基底.

(ii) 注意到 $B = AA^{-1}B$. 于是,

$$P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) 因为

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以，坐标是

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. (15分) 设 $\mathbb{R}[x]_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}[x]_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]_3 \\ & f(x) & \mapsto & x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx}. \end{array}$$

(i) 验证: ϕ 是线性映射.

(ii) 计算 $\ker(\phi)$ 的一组基.

(iii) 计算 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数.

解. (i) 直接验证.

(ii) 设 $f = f_2x^2 + f_1x + f_0$. 则 $\phi(f) = 2xf_2 - 2xf_2 - f_1 = -f_1$. 于是 $f \in \ker(\phi)$ 当且仅当 $f_1 = 0$. 由此得出 $\ker(\phi)$ 的一组基底是 $1, x^2$.

(iii) $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 3 - 2 = 1$.

3. (10分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{Q}).$$

计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^tAP$.

解.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (10分) 设 $\mathbb{R}^n$ 上的的二次型 q 由公式对任意 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

定义.

(i) 计算 q 在标准基下的矩阵.

(ii) 计算 q 的签名.

解. *(i)* 标准基下的矩阵是

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 展开行列式得

$$\det(A_n) = \left(1 - \frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

(见第一学期第三章第一讲第六页的例子).

当 $n=1$ 时, q 的签名是 $(1,0)$. 当 $n=2$ 时, q 的签名是 $(2,0)$. 这是因为 $\det(A_1)>0$ 且 $\det(A_2)>0$.

注意到 $\det(A_3)=0$. 由行列相伴变换得

$$A_3 \sim_c \operatorname{diag}\left(1, \frac{3}{4}, 0\right).$$

故 q 的签名等于 $(2,0)$.

下面考虑 $n>3$ 的情形. 我们把第四行加到第三行并同时做相应的列变换得到

$$A_n \sim_c B_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & -\frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

我们有 $\det(A_1)=\det(B_1)>0$, $\det(A_2)=\det(B_2)>0$, $\det(A_3)=0$ 但 $\det(B_3)<0$, 且 $\det(A_i)=\det(B_i)<0$, $i=4,5,\ldots,n$. 由 *Jacobi* 公式

$$B_n \sim_t \operatorname{diag}_n(1,1,-1,1,\ldots,1).$$

故 B_n 的签名是 $(n-1,1)$. 于是, q 的签名是 $(n-1,1)$. $\square$

注解 0.1 同学们有两种不同的方法得到了正确的结果.

(a) 利用行列相伴消元把 $n>3$ 的矩阵合同变换为一个以前已知签名的矩阵.

(b) 利用特征多项式(第三章大课会讲到).

5. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 $n>1$.

(i) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且满足 $\dim(V_1)+\dim(V_2)>n$. 证明: $V_1\cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

(ii) 举例说明 V 中存在三个维数为正的真子空间 W_1, W_2, W_3, 满足 $W_1+W_2+W_3=V$ 且 $W_1\cap W_2\cap W_3=\{\mathbf{0}\}$; 但 $W_1+W_2+W_3$ 不是直和.

证明. *(i)* 由维数公式

$$\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1+V_2)\geq \dim(V_1)+\dim(V_2)-n.$$

因为 $\dim(V_1)+\dim(V_2)>n$, 所以 $\dim(V_1\cap V_2)>0$. 于是, $V_1\cap V_2\neq\{\mathbf{0}\}$.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 设 $W_1=\langle\mathbf{e}_1\rangle, W_2=\langle\mathbf{e}_2\rangle, W_3=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$. 它们显然都是真子空间. 因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\in W_1+W_2+W_3$. 所以 $W_1+W_2+W_3=V$. 因为 $W_2\subset W_3\subset W_1+W_3$, 所以 $W_1+W_2+W_3$ 不是直和.

另一方面, 设 $\mathbf{v}\in W_1\cap W_2\cap W_3$. 则 $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{e}_1=\beta\mathbf{e}_2$, 其中 α,β 是 F 中的元素. 我们有 $\alpha\mathbf{e}_1-\beta\mathbf{e}_2=\mathbf{0}$. 因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 线性无关, 所以 $\alpha=\beta=0$, 即 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. □

6. (15分) 设 F 是域. 定义:

$$U=\{A\in \mathrm{M}_n(F)\,|\,A \text{ 是对角矩阵 且 } \mathrm{tr}(A)=0\}$$

和

$$V=\{A\in \mathrm{M}_n(F)\,|\,A \text{ 中对角线上元素都相等}\}.$$

(i) 验证: U 和 V 是子空间, 并计算 U 和 V 的维数.

(ii) 证明: 当 F 特征等于零时, $\mathrm{M}_n(F)=U\oplus V$.

(iii) 当 F 特征为正时, $U+V$ 是不是一定是直和? 如果是, 请证明之; 否则举出反例.

证明. *(i)* 设 $X=(x_{i,j})_{n\times n}$ 是由 n^2 个未知数组成的矩阵. 则 U 是齐次线性方阵组 $x_{1,1}+x_{2,2}+\cdots+x_{n,n}=0$ 和 $x_{i,j}=0$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}, i\neq j$, 的解空间; V 是齐次线性方程组 $x_{1,1}=x_{2,2}=\cdots=x_{n,n}$ 的解空间. 于是, U,V 都是 $\mathrm{M}_n(F)$ 中的子空间. 在定义 U 的方程组中共有 $n(n-1)+1$ 个方程, 每个方程中出现的未知数都不相同. 于是, 该方程组的系数矩阵的秩等于 $n(n-1)+1$. 从而 $\dim(U)=n-1$. 在定义 V 的方程组中共有 $n-1$ 个方程. 该方程组的系数矩阵的秩等于 $n-1$. 于是, $\dim(V)=n^2-n+1$.

(ii) 设 $A\in U\cap V$. 因为 $A\in V$, 所以 A 的对角线上的元素都相等, 设其为 a. 因为 $A\in U$, 所以 A 是对角矩阵. 于是 $A=aE$. 由因为 $\mathrm{tr}(A)=0$, 所以 $na=0$. 因为 F 的特征等于零, 所以 $a=0$, 即 $A=O$. 故 $U+V$ 是直和. 进而, 我们有

$$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)=n(n-1)+1+n-1=n^2=\dim \mathrm{M}_n(F).$$

由此得出 $\mathrm{M}_n(F)=U\oplus V$.

(iii) 设 F 的特征等于 $p>0$. 当 $p|n$ 时, $E\in U\cap V$. 此时 $U+V$ 不是直和.

7. (10分) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明 A 列满秩当且仅当 A^tA 正定.

证明. 设 $B=A^tA$. 则 $B^t=(A^tA)^t=A^t(A^t)^t=A^tA=B$. 于是 $B\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 B 正定. 则 $\operatorname{rank}(B) = n$. 于是 $\operatorname{rank}(A) \geq n$. 因为 A 只有 n 列, 所以 $\operatorname{rank}(A) = n$. 于是 A 列满秩.

设 A 列满秩, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. 令 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. 因为 A 列满秩, 所以 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 只有平凡解. 于是, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_m$. 注意到 $\mathbf{x}^t B\mathbf{x} = \mathbf{x}^t A^t A\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{y} > 0$. 于是, B 正定. □

8. (10分) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 定义

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \det\begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^t & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

证明：

(i) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型.

(ii) 设 $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 证明: 二次型 q 是负定的.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \det\begin{pmatrix} A & \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z} \\ \mathbf{y}^t & 0 \end{pmatrix} = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

类似可知 $f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. 于是 f 是双线性型. 设

$$B = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 对称, 所以

$$B^t = \begin{pmatrix} A & \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(B) = \det(B^t)$, 所以 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. 于是, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是对称的双线性型.

(ii) 设

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 对称, 所以 C 是对称矩阵. 因为 A 正定, 所以 A^{-1} 存在. 由分块的行列相伴消元可知

$$C \sim_c \begin{pmatrix} A & O \\ O & -\mathbf{x}^t A^{-1}\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

于是对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \det(C) = \lambda^2 \det(A)(-\mathbf{x}^t A^{-1}\mathbf{x}) < 0$. 其中 λ 是某个 n 阶可逆矩阵的行列式. 因为 A 正定, 所以 A^{-1} 正定. 于是, $-\mathbf{x}^t A^{-1}\mathbf{x} < 0$, 即 $q(\mathbf{x}) < 0$. q 负定. □

9. (5分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 的特征不等于 2. 设 q 是 V 上的二次型且 $\mathrm{rank}(q) = n$. 再设存在非零向量 $\mathbf{x} \in V$ 使得 $q(\mathbf{x}) = 0$. 证明: q 是满射.

证明. 设 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}$. 从 $\mathbf{e}_1$ 出发扩充一组基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. 设 $A = (a_{i,j})$ 是 q 在这组基下的矩阵. 因为 $q(\mathbf{e}_1) = 0$, 所以 $a_{1,1} = 0$. 因为 A 满秩, 所以存在 $j \in \{2, \ldots, n\}$ 使得 $a_{1,j} \neq 0$. 令 $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_j$, 其中 $\alpha, \beta \in F$ 待定. 注意到 $a_{1,j} = a_{j,1}$. 我们有

$$q(\mathbf{v}) = 2a_{1,j}\alpha\beta + a_{j,j}\beta^2.$$

设 $c \in F$. 令

$$\beta = 1, \quad \alpha = \frac{c - a_{j,j}}{2a_{1,j}}.$$

则 $q(\mathbf{v}) = c$. □