期中大作业

1. (15分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中两组向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (i) 验证: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基.

   (ii) 计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)P$.

   (iii) 设 $\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$. 计算 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

2. (15分) 设 $\mathbb{R}[x]_3 = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}[x]_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]_3 \\ & f(x) & \mapsto & x\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx}. \end{array}$$

   (i) 验证: ϕ 是线性映射.

   (ii) 计算 $\ker(\phi)$ 的一组基.

   (iii) 计算 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数.

3. (10分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{Q}).$$

   计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^t A P$.

4. (10分) 设 $\mathbb{R}^n$ 上的的二次型 q 由公式对任意 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$

   定义.

   (i) 计算 q 在标准基下的矩阵.

   (ii) 计算 q 的签名.

5. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 $n > 1$.

(i) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且满足 $\dim(V_1) + \dim(V_2) > n$. 证明: $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

(ii) 举例说明 V 中存在三个维数为正的真子空间 W_1, W_2, W_3, 满足 $W_1+W_2+W_3 = V$ 且 $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$; 但 $W_1 + W_2 + W_3$ 不是直和.

6. (15分) 设 F 是域. 定义:

$$U = \{A \in \mathrm{M}_n(F) \,|\, A \text{ 是对角矩阵 且 } \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

和

$$V = \{A \in \mathrm{M}_n(F) \,|\, A \text{ 中对角线上元素都相等}\}.$$

(i) 验证: U 和 V 是子空间, 并计算 U 和 V 的维数.

(ii) 证明: 当 F 特征等于零时, $\mathrm{M}_n(F) = U \oplus V$.

(iii) 当 F 特征为正时, $U + V$ 是不是一定是直和? 如果是, 请证明之; 否则举出反例.

7. (10分) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明 A 列满秩当且仅当 $A^t A$ 正定.

8. (10分) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 定义

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \det\begin{pmatrix} A & \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^t & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

证明：

(i) f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型.

(ii) 设 $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 证明: 二次型 q 是负定的.

9. (5分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 的特征不等于 2. 设 q 是 V 上的二次型且 $\mathrm{rank}(q) = n$. 再设存在非零向量 $\mathbf{x} \in V$ 使得 $q(\mathbf{x}) = 0$. 证明: q 是满射.