更正：引理2.1 证明中

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

§2.6 齐次线性方程组

定义：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，增广矩阵 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$ 对应的线性方程组 (H) 称为齐次 (homogeneous) 线性方程组

即

$$(H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

注 ① (H) 有平凡解 $\begin{cases} x_1=0 \\ \vdots \\ x_n=0 \end{cases}$

② (H) 由系数矩阵 A 唯一确定

③ 对 (H) 做 I, II, III 类行变换仍得到齐次线性方程组

注. 设 (L) 是增广矩阵 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{matrix}\right)$ 对应的线性方程组. 则 (L) 齐次

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ \vdots \\ x_n=0 \end{cases}$ 是 (L) 的解.

注：几何意义

二元齐次线性方程组代表若干过原点的直线

三元齐次线性方程组代表若干过原点的平面.

定理2.3 设A是$m\times n$阶的矩阵，其中$m<n$. 则以A为系数矩阵的齐次线性方程组(H)不确定

证: ~~由定理2.1 (H)的~~ (H)对应的增广矩阵是 $\left(A \,\vdots\, \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\right)$

由定理2.1 (H)等价于一个线性方程 (H') 其增广矩阵是 $\left(A' \,\vdots\, \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\right)$. 其中 A'是$m\times n$阶的阶梯型矩阵.

因为$m<n$, 所以A'中含有非零元素的行数小于n. 由定理2.2, (H')不确定, 从而(H)不确定

注: 几何意义: 两张平面不可能只相交于一点.

命题2.1 设A是$m\times n$阶矩阵, 以A为系数矩阵的齐次线性方程组为(H), 以 $\left(A \,\vdots\, \begin{matrix}b_1\\ \vdots \\ b_m\end{matrix}\right)$ 为增广矩阵的线性方程组为(L), 其中$b_1,\dots,b_m$是实数. 设

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n \end{cases} (*), \quad \begin{cases} x_1=\beta_1 \\ \vdots \\ x_n=\beta_n \end{cases} (**)$$

是(L)的解,

$$\begin{cases} x_1=\omega_1 \\ \vdots \\ x_n=\omega_n \end{cases} (***)$$

是(H)的解

则 (i) $$\begin{cases} x_1=\alpha_1-\beta_1 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n-\beta_n \end{cases}$$ 是(H)的解

(ii) $$\begin{cases} x_1=\omega_1+\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\omega_n+\alpha_n \end{cases}$$ 是(L)的解

证：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 对任意 $i=1,\dots,m$

i) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j-\beta_j)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\beta_j\right)$$

$$=b_i-b_i=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\alpha_1-\beta_1 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n-\beta_n \end{cases}$$ 是 (H) 的解

ii) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega_j+\alpha_j)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\omega_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\right)$$

$$=0+b_i=b_i \Rightarrow \begin{cases} x_1=\omega_1+\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\omega_n+\alpha_n \end{cases}$$ 是 (L) 的解.

例：设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，$m<n$，$b_1,\cdots,b_m$ 是实数

证明 以 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$ 为增广矩阵的线性方程组，或者不相容，或者不确定

证：设 (L) 相容，且

(*) $\begin{cases} x_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n \end{cases}$ 是 (L) 的解

设以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组是 (H). 由定理2.3 (H) 有非零解

(**) $\begin{cases} x_1=\omega_1 \\ \vdots \\ x_n=\omega_n \end{cases}$. 由命题2.1 $\begin{cases} x_1=\omega_1+\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\omega_n+\alpha_n \end{cases}$ 是 (L) 的解. 因为，$\omega_1,\dots,\omega_n$ 不全为零，所以 (*) 和 (**) 是 (L) 的两个不同的解

命题2.2 设 A 是 n 阶方阵，(H) 是以 A 为系数的齐次线性方程组，$b_1,\cdots,b_n$ 是实数. (L) 是以 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right)$ 为增广矩阵的线性

方程组. 如果(H)不确定, 则(L)不确定.

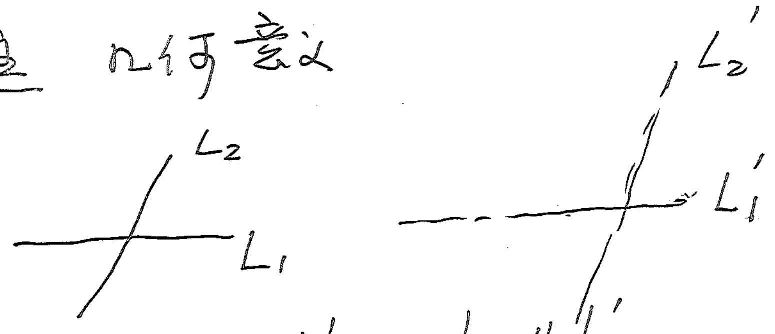
证: 由定理2.2(ii), (H)等价于一个齐次线性方程组. 其增广矩阵为 $\left(A' \,\middle|\, \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\right)$ 中 A' 是阶梯型的.

因为(H')不确定. 由定理2.2(ii) A' 中有n行含有非零元. ~~因为~~ ~~A'只有n~~ 于是(L)也等价于一个线性方程组(L') 其增广矩阵为

$$\left(A' \,\middle|\, \begin{matrix}b'_1\\ \vdots \\ b'_n\end{matrix}\right)$$

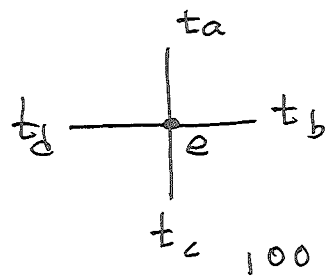
由定理2.2(ii). (L')不确定 $\Rightarrow$ (L)不确定

注 几何意义

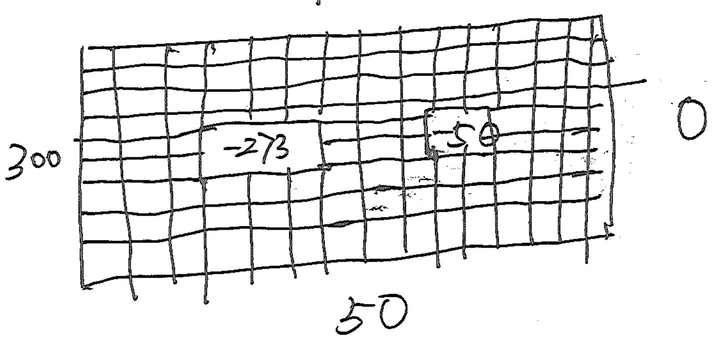


$L_1 \parallel L_1'$, $L_2 \parallel L_2'$

例(平板受热)



$$t_e = \frac{t_a+t_b+t_c+t_d}{4}$$



设有204个边界 416个内部点

每个内部点对应一个线性方程

$$t_e = \frac{t_a+t_b+t_c+t_d}{2}$$

从而得到一个有416个未知数 416个方程 的线性方程组(L)

问题 (L) 是不是确定的

设 (L) 对应的系数矩阵为 A

由命题2.2，只要研究 A 对应的齐次

线性方程组 (H) 是否确定就可.

(∵ A 是方阵!)

设 ~~(H) 有非零解.~~ 设 (H) 的解中

t_e 的绝对值最大. 因为 t_e 是内点

$$t_e = \frac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4}$$

其中 ~~t_a 不是零/或者~~ $|t_a| \leq |t_e|$

同样对 t_b, t_c, t_d

$$4|t_e| = |t_a + t_b + t_c + t_d|$$
$$\leq |t_a| + |t_b| + |t_c| + |t_d| \leq 4|t_e|$$

$$\Rightarrow \quad |t_a| = |t_b| = |t_c| = |t_d| = |t_e|$$

因为边界点温度为零，且网上通过

所以 任意内点的温度(的绝对值)都

都是零. $\Rightarrow$ (H) 确定 $\Rightarrow$ (L) 确定

§2.8 二阶行列式

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是二阶实数矩阵

A 的行列式 (determinant) 是

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

记为 $\det(A)$ 或 $|A|$

例 $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$

命题2.3 设 A 如上, (L_2) 是

以 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right)$ 的线性方程组.

则 (i) (L_2) 确定 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

(ii) 设 (L_2) 确定

则 (L_2) 的~~唯一~~解是

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{|A|}$$

证：~~(i) 由命题~~ 设 $a_{11}\neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}r_1}\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ 0 & \frac{|A|}{a_{11}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{a_{11}}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{a_{11}r_2}\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1\\ 0 & |A| & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}\end{array}\right)=:M$$

(i) "$\Rightarrow$" ~~设 (L_2)~~ (L_2) 确定 则 a_{11}, a_{21} 不全为零. 不妨设 $a_{11}\neq 0$

由 M 和定理2.2 (ii) $|A|\neq 0$

"$\Leftarrow$" ~~由定理2.2~~ a_{11}, a_{21} 不全为零, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 由定理2.2和~~阶梯~~矩阵 M

(L_2) 确定

(ii) 由 (i) 可知 $|A|\neq 0$ 直接代入验证可知

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{|A|}\\[2ex] x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{|A|}\end{cases}$$

是 (L_2) 的解.

例：设 (L_2) $\begin{cases} x_1+x_2=1\\ 2x_1+\alpha x_2=3\end{cases}$

当 α 取何值时 (L_2) 确定

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha-2.$

由命题2.3. 当 $\alpha\neq 2$ 时, (L_2) 确定

§3. 集合与映射.

§3.1. 集合(set)与子集(subset)

⊙ 集合是一些对象的总合

例. 26个字母组成的集合

$S_1 = \{a, b, c, \cdots z\}$

正偶数的集合

$S_2 = \{2, 4, 6, \cdots\}$

$= \{a \mid a$ 是正整数且是2的倍数$\}$

集合中的对象称为元素

a是S_1中的元素, 记为 $a \in S_1$

3不是S_2中的元素, 记为 $3 \notin S_2$

例. 常见的集合

正整数集 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$

自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

整数集 $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ 或 $-x \in \mathbb{N}\}$

有理数集 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

实数集 $\mathbb{R}$

复数集 $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$

定义: 设 S, T是两个集合. 如果 S中的元素都是T中的元素. 则称S是T的子集 (subsets). 记为 $S \subset T$.

当 $S \subset T$ 但 $S \neq T$ 时 S称为T的真子集, 记为 $S \subsetneq T$

例 $\mathbb{Z}^+ \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

例 $\emptyset$ 是任何集合的子集

例 列出 $S=\{a,b,c\}$ 的所有子集

$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$

$\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ 共 $8=2^3$ 个

思考题：设集合 S 有 n 个元素

证明 S 共有 2^n 个子集

定义 设 A 是 $m\times n$ 阶系数矩阵，$b_1,\dots,b_m\in\mathbb{R}$

(L) 是 $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)$ 对应的线性方程组．(L) 的所有实解的集合

记为 $sol_{\mathbb{R}}(L) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{cases} x_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ x_n=\alpha_n \end{cases} \text{是}(L)\text{的解},\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R} \right\}$

命题2.1 设 A, $b_1,\dots,b_m$, (L) 如上

设 (H) 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组．设 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(L)$

则 $sol_{\mathbb{R}}(L) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(H) \right\}}_{S}$

证：设 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(L)$

由命题2.1 (i) $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(H)$

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \in S$

$\Rightarrow sol_{\mathbb{R}}(L) \subset S$

反之 设 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in S$．则存在 $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(H)$

~~由命题2.1(ii)~~ 使得 $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$

由命题2.1(ii) $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in sol_{\mathbb{R}}(L)$

$\Rightarrow S \subset sol_{\mathbb{R}}(L)$ 于是 $sol_{\mathbb{R}}(L) = S$ □

例 求 (H) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$ 的所有实数解

解：$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$ $\quad x=-z$, $\; y=-t$

$$Sol_{\mathbb{R}}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

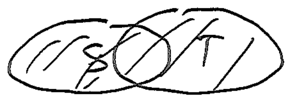
§3.2 集合的运算

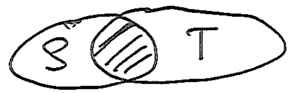
定义：设 S, T 是两个集合，S 和 T 的并

$$S \cup T := \{a \mid a \in S \text{ 或 } a \in T\}$$

S 和 T 的交

$$S \cap T := \{a \mid a \in S \text{ 且 } a \in T\}$$





注 $S \cup \emptyset = S$，$S \cap \emptyset = \emptyset$.

类似地 可以定义有限多个集合的并与交.

更一般地，设 I 是一个指标集(有限或无限)，$\forall i \in I$，S_i 是集合

$$\bigcup_{i \in I} S_i := \{a \mid \exists j \in I, \text{使得 } a \in S_j\}$$

$$\bigcap_{i \in I} S_i := \{a \mid \forall j \in I, \; a \in S_j\}$$

例 设 O 是所有偶数的集合

E 是所有奇数的集合

则 $O\cup E=\mathbb{Z}$, $O\cap E=\emptyset$

定义：设 S, T 是集合

$$S\setminus T:=\{a \mid a\in S \text{ 但 } a\notin T\}$$

即 $S\setminus T=\{a\in S \mid a\notin T\}$

例：设 $i\in\mathbb{N}$. $S_i=\mathbb{N}\setminus\{i\}$

证明 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i=\emptyset$

证：假设 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i\neq\emptyset$. 则

$\exists a\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i$. 即 $a\in S_i$,

其中 $i=0,1,2\ldots$

于是 $a\neq i$, $i=0,1,2\ldots$

$\Rightarrow a\notin\mathbb{N}$

但 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i\subset\mathbb{N}$ —×— 目

命题 3.2 设 R, S, T 是集合

(i) $S\cup T=T\cup S$, $S\cap T=T\cap S$

(ii) $(R\cup S)\cup T=R\cup(S\cup T)$

$(R\cap S)\cap T=R\cap(S\cap T)$

(iii) $(S\cup T)\cap R=(S\cap R)\cup(T\cap R)$

$(S\cap T)\cup R=(S\cup R)\cap(T\cup R)$

证：(i), (ii) 显然

我们来验证(iii)中第一个等式.

第二个等式自己验证.

设 $x\in(S\cup T)\cap R$ 则

$\Leftrightarrow x\in S\cup T$ 且 $x\in R$

$\Leftrightarrow (x\in S$ 且 $x\in R)$ 或 $(x\in T$ 且 $x\in R)$

$\Leftrightarrow (x\in S\cap R)$ 或 $x\in (T\cap R)$

$\Leftrightarrow x\in (S\cap R)\cup x\in (T\cap R)$

于是 $\cancel{x\in}$ 第一式成立

第二式的证明类似 ☐

定义：设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 n 个集合

$S_1\times\cdots\times S_n := \{(x_1,\cdots x_n) \mid x_1\in S_1,\cdots, x_n\in S_n\}$

称之为 $S_1,\cdots, S_n$ 的笛卡儿积。

注. $(x_1,\cdots,x_n)$ 也可以写为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

注：当 $S_1=\cdots=S_n$ 时 $S_1\times\cdots\times S_n$ 记为 S_1^n

例 $\mathbb{R}^{1\times n}=\{(x_1,\cdots x_n) \mid x_1,\cdots x_n\in\mathbb{R}\}$

实数上 n 维行空间

$\mathbb{R}^{n\times 1}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1,\cdots x_n)\in\mathbb{R}\right\}$

实数上的 n 维列空间

§3.3 映射

设 S, T 是两个非空集合.

$f\in S\times T$. 如果

$\forall s\in S$, $\exists ! t\in T$. 使得

$(s.t)\in \cancel{S\times T}\ f$

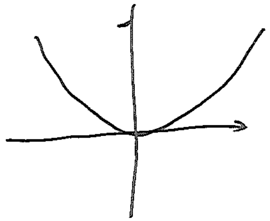
则称 f 是从 S 到 T 的映射

记为 $f: S\longrightarrow T$.

当 $(s,t)\in f$. 则记

$t=f(s)$.

例： $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$ …即 $f(x)=x^2$



$$f=\{(x,x^2) \mid x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$$

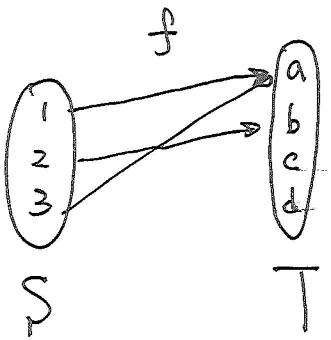
例 设 $S=\{1,2,3\}$, $T=\{a,b,c,d\}$

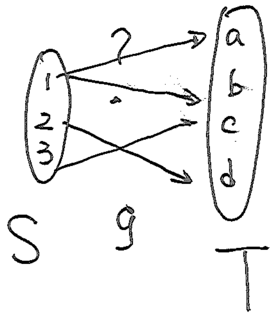
$f=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ 是映射

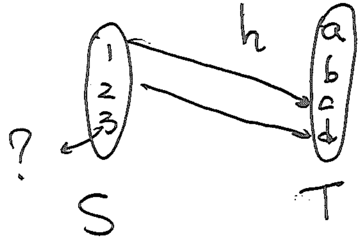
$g=\{(1,a)\ (1,b),(2,d),(3,c)\}$

不是映射

$h=\{(1,c),(2,d)\}$ 不是映射







例：$\underbrace{\text{学号集合到学生姓名}}_{\text{同济大一年级}}$是映射

但同济大学生姓名到学号的集合不一定是映射.

定义：设 $f: S\longrightarrow T$. $S'\subset S$.

$$f(S') := \{f(s) \mid s\in S'\}$$

称为 S' 在 f 下的像集

注 (i) $f(S')\subset T$.

(ii) $f(S)$ 称为 f 的像集. 记为 $\mathrm{im}(f)$.

例：设 $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin(x)$

$$\mathrm{im}(\sin) = [-1, 1]$$

$$\sin((0, \tfrac{\pi}{2})) = (0, 1)$$

定义：设 $f: S \to T$ 是映射．如果 $\mathrm{im}(f) = T$．则称 f 是满射

例：$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 不是满射．但

~~$P_S: S \times T \longrightarrow$~~

$\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ 是满射

例：$\pi_S: S \times T \longrightarrow S$

$(s, t) \longmapsto s$

是满射．称为从 $S \times T$ 到 S 的投射．

定义：设 $f: S \to T$ 是映射，$T' \subset T$

$$f^{-1}(T') = \{ s \in S \mid f(s) \in T' \}$$

称为 T' 在 f 下的原像（逆像）

注：$f^{-1}(T) = S$

例：$\sin^{-1}(\{0\}) = \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$\sin^{-1}((-1, 1)) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

定义：设 $f: S \to T$ 是映射

如果 $\forall s_1, s_2 \in S$，$s_1 \neq s_2$

都有 $f(s_1) \neq f(s_2)$

则称 f 是单射

例：$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 不是单射

$\sin: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ 是单射

例：$i: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \longmapsto x$ 是单射

定义：设 $f: S\to T$ 是映射. 如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是双射.（单满射，一一对应）

例：恒同映射：$id_S: S \longrightarrow S$, $x \longmapsto x$ 是双射

例：$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \longmapsto x+1$ 是双射

定义：设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射. $S' \subset S$ 非空子集：$f|_{S'}: S' \longrightarrow T$, $s' \longmapsto f(s)$ 称为 f 在 S' 上的限制.

例：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}$

$f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ 是单射

定义：设 $f: S \longrightarrow T$, $t \in T$. $f^{-1}(\{t\})$ 称 t 关于 f 的纤维 (fiber)

例：$\sin^{-1}(\{1\}) = \{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

注：$f: S \to T$ 是满射 $\iff \forall t \in T$, $f^{-1}(\{t\})$ 非空

f 是单射 $\iff \forall t \in T$, $f^{-1}(\{t\})$ 至多含有一个元素

例：设 $f: S \to T$ 是映射. $S' \subset S$, $T' \subset T$.

证明：(i) $S' \subset f^{-1}(f(S'))$

(ii) $f(f^{-1}(T')) \subset T'$

证: 设 $s' \in S'$. $t' = f(s')$

则 $t' \in f(S') \Rightarrow s' \in f^{-1}(f(S'))$

设 $t' \in f(f^{-1}(T'))$

则 $\exists s' \in f^{-1}(T')$ 使得

$t' = f(s')$

$\because s' \in f^{-1}(T')$ $\therefore f(s') \in T'$

$\Rightarrow t' \in T'$ $\square$

例: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$S' = \mathbb{R}^+$ $\quad f(S') = \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(f(S')) = f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^+ \subsetneqq \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(f^{-1}(\mathbb{R})) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$

其中 $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \subsetneqq \mathbb{R}$

§3.4 映射的复合

定义 设 $f: R \to S$, $g: S \to T$ 是映射

则 $h: R \to T$

$r \mapsto g(f(r))$

称为 f 和 g 的复合, 记为 $g \circ f$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & S \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

例: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\qquad x \mapsto x+1$

$g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1$

$f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$

当 $f \circ g$, $g \circ f$ 都有定义时, 一般 $f \circ g \neq g \circ f$.