回忆：定义：设 $f: R \to S$，$g: S \to T$

令 $h: R \to T$

$r \mapsto g(f(r))$

称 h 为 f 和 g 的复合，记为 $g\circ f$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & S \arrow[d, "g"] \\ & T \end{tikzcd}$$

$h = g\circ f$

例：设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x+1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g\circ f(x) = g(x^2) = x^2+1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f\circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2$

注：当 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 都有意义时，$g\circ f = f\circ g$ 一般不成立

例 设 S 是某中学学生的集合

C 是该学校所有班的集合

T 是……老师……

$f: S \to T$

$s \mapsto s$ 的班主任.

$g: S \to C$

$s \mapsto s$ 所在的班

$h: C \to T$

$c \mapsto c$ 的班主任

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \\ & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

$f = h\circ g$

注：$g\circ h$ 无意义.

命题3.2 设 $f: R \to S$，$g: S \to T$

(i) 如果 f, g 是单射，则 $g\circ f$ 也单

(ii) ……满射 ……也满

(iii) ……双射 ……双射

证：(i) 设 $s_1, s_2 \in S$，$s_1 \neq s_2$

则 $f(s_1) \neq f(s_2)$ （∵ f 单）

$\Rightarrow g(f(s_1)) \neq g(f(s_2))$ （∵ g 单）

$\Rightarrow g \circ f$ 是单射

(ii) 设 $t \in T$. 则 $\exists s \in S$ 使得

$g(s) = t$ （∵ g 满）

$\exists r \in R$ 使得 $f(r) = s$ （∵ f 满）

$g \circ f(r) = g(f(r)) = g(s) = t$

于是 $g \circ f$ 是满射

(iii) 由 (i), (ii) 直接可得

定义：设 $f: S \to T$. ~~如果存在~~ $g: T \to S$

使得 $g \circ f = id_S$，$g \circ f = id_T$

则称 f 是可逆映射

注. 此时 g 也可逆

例：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$x \mapsto x+1$，$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$x \mapsto x-1$

$g \circ f(x) = g(x+1) = x$，$f \circ g(x) = f(x-1) = x$

于是 f 可逆

定理3.1 设 $f: S \to T$ 则

f 可逆 $\Leftrightarrow$ f 是双射

证："$\Rightarrow$" 设 $g: T \to S$ 满足

$g \circ f = id_S$ 和 $f \circ g = id_T$

$\forall s_1, s_2 \in S$，$s_1 \neq s_2$

$s_1 = g \circ f(s_1) = g(f(s_1))$，$s_2 = g \circ f(s_2) = g(f(s_2))$

∵ $s_1 \neq s_2$ ∴ $f(s_1) \neq f(s_2)$

于是 f 是单射

设 $t \in T$. $t = id_T(t) = f \circ g(t)$

于是 $t = f(g(t)) \Rightarrow f$ 是满射

由此可知 f 是双射

"⇐" $\forall t\in T$, $\exists!\, s\in S$，使得 $f(s)=t$

定义：$g: T \longrightarrow S$，$t \longmapsto s$，其中 $f(s)=t$

是映射（良定义的）

$\forall s\in S$ $\quad g\circ f(s) = g(f(s)) = s$

$\forall t\in T$ $\quad f\circ g(t) = f(s) = t$

于是 f 是可逆映射 ☒

例：$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ 是可逆的

定理3.2 设 $f: R\to S$，$g: S\to T$，$h: T\to U$ 是映射，则

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$

证 设 $r\in R$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & S \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dashed, "h\circ g"] & \\
 & T \arrow[r, "h"'] & U
\end{tikzcd}$$

$h\circ(g\circ f)(r) = h(g\circ f(r)) = h(g(f(r)))$

$(h\circ g)\circ f(r) = h\circ g(f(r)) = h(g(f(r)))$

于是 $h\circ(g\circ f)(r) = (h\circ g)\circ f(r)$

由 r 任意性 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ ☒

注：上述定理的结论称为复合的结合律。~~我们把~~ $h\circ(g\circ f)$ 或 $(h\circ g)\circ f$ 简记为 $h\circ g\circ f$.

例：设 $f: S\to T$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_T\circ f"'] & T \arrow[d, "id_T"] \\
 & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] & T \\
S \arrow[u, "id_S"] \arrow[ur, "f\circ id_S"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall s\in S$ $\quad id_T\circ f(s) = id_T(f(s)) = f(s)$

$\qquad f\circ id_S(s) = f(id_S(s)) = f(s)$

$\Rightarrow\ id_T\circ f = f$，$\quad f\circ id_S = f$

推论3.1 设 $f: S \to T$, $g: T \to S$, $h: T \to S$ 满足 $g \circ f = id_S$, $f \circ h = id_T$

则 $g = h$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "f\circ h = id_T"'] & S \arrow[d, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f = id_S"] & \\ & T \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

证：由结合律

$$(g\circ f)\circ h = g\circ(f\circ h) \Rightarrow id_S \circ h = g\circ id_T$$

$$\Rightarrow h = g \qquad \square$$

推论3.2 设 $f: S \to T$ 可逆 $g: T \to S$. $h: T \to S$ 满足

$g\circ f = h \circ f = id_S$, $f\circ g = f\circ h = id_T$

则 $g = h$

证：由推论3.1直接可得.

定义：设 $f: S \to T$ 可逆. 即 $\exists$ $g: T \to S$ 使得 $g\circ f = id_S$ 和 $f \circ g = id_S$. 称 g 是 f 的逆映射 记为 f^{-1}

注：由推论3.2, f^{-1} 是良定义的 且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

推论3.3 设 $f: R \to S$, $g: S \to T$ 是可逆映射. 则 $g\circ f$ 可逆 且

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \qquad (*)$$

证：由命题3.2(iii) $g\circ f$ 是双射

由定理3.1, $g \circ f$ 可逆.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "f"] & S \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[d, shift left, "g"] \\ & T \arrow[u, shift left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}(id_S\circ f)$$

$$= f^{-1}\circ id_S \circ f$$

$$= f^{-1}\circ f = id_S \qquad \square$$

同理 $g\circ f\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = id_T \qquad \square$

注 (*) 称为"穿衣脱衣规则"

例：设 $\pi_x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$　　$i_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x,0)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\pi_x"] \arrow[dr, "i_x\circ\pi_x"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "i_x"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$i_x \circ \pi_x((x,y)) = i_x(x) = (x,0)$$

$$\pi_x \circ i_x(x) = \pi_x((x,0)) = x$$

$\pi_x \circ i_x = id_{\mathbb{R}}$ 但 $i_x \circ \pi_x \neq id_{\mathbb{R}^2}$

§3.5 集合的势 (cardinality)

定义：设 S, T 是两个非空集合. 如果存在 $f: S \to T$ 是双射. 则称 S 和 T 等势

命题3.3 设 S, T 是集合, S 非空且有限 ~~如果~~ 则 S 和 T 等势 $\Longleftrightarrow$ T 中元素个数与 S 中元素个数相同

证：设 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

"$\Longleftarrow$" 设 $T = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ 令
$$f: S \to T,\quad a_i \mapsto b_i, \quad i=1,2,\dots,k$$
则 f 是双射.

"$\Longrightarrow$" 设 $f: S \to T$ 是双射. 则 $\forall i \in \{1,2,\dots,k\}$, $f(a_i) \in T$. 且 $f(a_1), \dots, f(a_k)$ 两两不同 于是 T 中至少有 k 个元素. 又因为 f 是满射. $T = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)\}$. 于是 T 中元素个数等于 k □

注：由上述命题可知. 有限集和它的真子集不可能等势

例：$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x-1$ 是双射

$\mathbb{Z}^+$ 与 $\mathbb{N}$ 等势但 $\mathbb{Z}^+ \subsetneq \mathbb{N}$.

关于集合势的几个基本事实

- 与 $\mathbb{Z}^+$ 等势的集合称为可数集
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 都是可数集，但 $\mathbb{R}$ 不是
- 集合 S 与它的所有子集构成的集合不等势.

关于符号的滥用 (abuse notation)

§3.6 关于符号的滥用 (abuse notation)

$f: S \to T$

设 f 是双射. 且 $T' \subset T$.

$f^{-1}(T')$ < T' 在 f^{-1} 下的像集 / T' 在 f 下的逆像集

事实上 两者是相等的.

作为 f^{-1} 的像集 设

$$U := \{ f^{-1}(t) \mid t \in T' \}$$

作为 f 的逆像集

$$V := \{ s \in S \mid f(s) \in T' \}$$

$\forall u \in U$, $\exists t \in T'$ 使得

$$u = f^{-1}(t) \Rightarrow f(u) = f(f^{-1}(t)) = f \circ f^{-1}(t)$$
$$= id_T(t) = t \in T'$$
$$\Rightarrow u \in V. \Rightarrow U \subset V$$

$\forall v \in V$. $f(v) \in T' \Rightarrow f^{-1}f(v) = v = f^{-1}(f(v))$

$$\Rightarrow v \in U \Rightarrow V \subset U$$

由此可知 $U = V$.

设 $t \in T'$ $f^{-1}(\{t\})$ ~~[illegible]~~ 也记为 $f^{-1}(t)$

于是 $f^{-1}(t)$ 代表什么要从上下文判断.

§4 等价关系和序关系

§4.1 二元关系

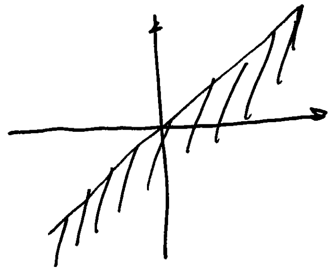
定义: 设 S 是非空集合. $R \subset S \times S$.

则称 R 是 S 上的一个二元关系.

如果 $(a, b) \in R$, 则称 a 和 b 有关系 R. 记为 aRb

例R

① 例：设 $S=\mathbb{R}$："$\geq$" 是 $\mathbb{R}$ 上的二元关系



② 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 上所有直线的集合

$$C := \{(l_1, l_2) \in L^2 \mid l_1, l_2 \text{ 有公共点}\}$$

$l_1 C l_2 \iff l_1$ 和 l_2 相交或重合

③ 设 $f: S \longrightarrow T$.

$$\sim_f := \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid f(s_1) = f(s_2)\}$$

$$s_1 \sim_f s_2 \iff f(s_1) = f(s_2)$$

④ 设 $S=\{a,b\}$. $R=\{(a,a)\}$

§4.2 等价关系

定义：设 $\sim$ 是集合 S 上的二元关系满足

(i) 自反律：$\forall a \in S$, $a \sim a$

(ii) 对称律 设 $a, b \in S$.

如果 $a \sim b$，则 $b \sim a$

(iii) 传递律. 设 $a,b,c \in S$ 满足 $a\sim b, b\sim c$

则 $a \sim c$.

我们称 $\sim$ 是 S 上的等价关系.

例E，常用的等价关系

① $= := \{(a,a) \mid a \in S\}$

$\forall a \in S$　$a=a$　（自反）

若 $a=b$ 则 b 是 a. 于是 $b=a$（对称）

若 $a=b, b=c$，则 b 是 a，c 也是 a

$\Rightarrow a=c$（传递）

更正：第二次讲义

P11. 映射的定义

$f\in S\times T$ 应为 $f\subset S\times T$

P14 第一个例子

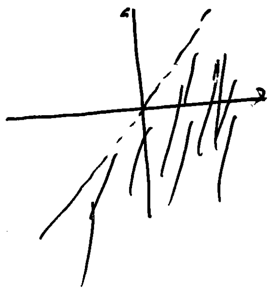
$i: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 单射

$x\mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

i: — imbedding

回忆：二元关系

① "$\geqslant$" $\geqslant := \{(x,y) \mid x\geqslant y\}$



② 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中直线的集合

$C=\{(l_1,l_2)\in L^2 \mid l_1, l_2 \text{ 有公共点}\}$

③ 设 $f: S\to T$.

$\sim_f = \{(s_1,s_2)\in S^2 \mid f(s_1)=f(s_2)\}$

④ 设 $S=\{a,b\}$. $R=\{(a,a)\}$

则 aRa 但 aRb, bRb 不成立.

定义：设 $\sim$ 是 S 上的二元关系

~~如果~~ $\sim$ 满足

(i) 自反律：$\forall a\in S$, $a\sim a$

(ii) 对称律：设 $a,b\in S$ 满足 $a\sim b$. 则 $b\sim a$

(iii) 传递律. 设 $a,b,c\in S$ 满足 $a\sim b$, $b\sim c$, 则 $a\sim c$

则称 $\sim$ 是等价关系

② 设 T 是 $\mathbb{R}^2$ 所有三角形的集合

$\cong$, $\sim$ (全等, 相似) ~~都是等价关系~~

③ 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 所有直线的集合

"$//$" 平行或重合 是等价关系

④ 设 $\mathbb{L}_n$ 是实系数上的 n 元线性方程组 ~~设 (L_1), (L_2) 两方程组~~

等价是等价关系

⑤ §4.1 中 $\sim_f$ 是等价关系

验证: $\forall s \in S$, $f(s)=f(s) \Rightarrow s \sim_f s$ (自反)

设 $s_1, s_2 \in S$. 如果 $s_1 \sim_f s_2$

则 $f(s_1)=f(s_2)$. 于是 $f(s_2)=f(s_1)$

$\Rightarrow s_2 \sim_f s_1$ (对称)

再设 $s_3 \in S$, $s_1 \sim_f s_2$, $s_2 \sim_f s_3$

则 $f(s_1)=f(s_2)$, $f(s_2)=f(s_3)$ $\Rightarrow f(s_1)=f(s_3)$

$\Rightarrow s_1 \sim_f s_3$ (传递)

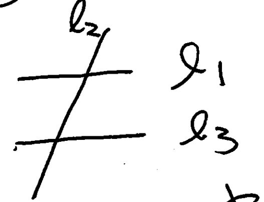
⑥ 设 S 是某中学学生的集合

$\sim_d = \{(a,b) \in S^2 \mid a, b$ 是同班同学$\}$

验证 §4.1 中例R中关系①, ② ④ 不是等价关系

① $2 \geq 1 \nRightarrow 1 \geq 2$ (对称律不成立)

② $l_1 \perp l_2$, $l_2 \perp l_3 \nRightarrow l_1 \perp l_3$



④ $(b,b) \notin R$ (自反律不成立)

§4.3 同余关系.

定义: 设 $a, b \in \mathbb{Z}$. 如果存在 $x \in \mathbb{Z}$ 使得 $a = xb$. 则称 b 整除 a. 记为 $b \mid a$.

回忆：整数中的带余除法

设 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0$

则 $\exists!\ q \in \mathbb{Z}$，$r \in \{0, 1, \cdots |b|-1\}$

使得 $a = q b + r$.

验证唯一性：再设

$$a = \tilde{q} b + \tilde{r}$$

其中 $\tilde{q} \in \mathbb{Z}$，$\tilde{r} \in \{0, 1, \cdots, |b|-1\}$

则 $(q - \tilde{q}) b = \tilde{r} - r$

$\Rightarrow |q - \tilde{q}||b| = |\tilde{r} - r|$

$\because |\tilde{r} - r| < |b|$ $\therefore |q - \tilde{q}| = 0$

$\Rightarrow |\tilde{r} - r| = 0 \Rightarrow q = \tilde{q}$，$r = \tilde{r}$

称 q 是 a 关于 b 的商，记为 $\mathrm{quo}(a, b)$

r … … … 余数 … rem(a, b)

引理 4.1 设 $a, b \in \mathbb{Z}$，$b \neq 0$

则 $b | a \iff \mathrm{rem}(a, b) = 0$

证："$\Rightarrow$" $\exists\ q \in \mathbb{Z}$

$a = q b \Rightarrow$ ~~$b | a$~~ $a = q b + 0 \Rightarrow \mathrm{rem}(a, b) = 0$

"$\Leftarrow$" $a = \mathrm{quo}(a, b)\ b \Rightarrow a | b$. ∎

引理4.2 设 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

如果 $n | a$，$n | b$，则 $n | (\alpha a + \beta b)$

证：设 $a = x n$，$b = y n$，其中 $x, y \in \mathbb{Z}$

$\alpha a + \beta b = \alpha x n + \beta y n = (\alpha x + \beta y) n$ ∎

$\Rightarrow n | (\alpha a + \beta b)$.

定义：设 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$\equiv_n := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid n | (a - b)\}$$

验证 $\equiv_n$ 是等价关系

$\forall a \in \mathbb{Z}$，$n | (a - a) \Rightarrow a \equiv_n a$

对称律成立

设 $a, b \in \mathbb{Z}$. $a \equiv_n b$. 则 $n | (a - b)$

由引理4.2 $n | (b - a)$. [取 $\alpha = -1$, $\beta = 0$]

对称律成立.

设 $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $a\equiv_n b$, $b\equiv_n c$. 则

$n\mid(a-b)$, $n\mid(b-c)$. 由引理4.2

$$n\mid[(a-b)+(b-c)]\Rightarrow n\mid(a-c)$$

$\Rightarrow a\equiv_n c$. 传递律成立.

例: 设 $n=2$. 所有偶数对 $\equiv_2$

等价. ~~所有奇数对~~ $\equiv_2$ 等价

但 一个奇数 ~~与~~ 对 $\equiv_2$ 不等价于 ~~一个偶数~~

注: $a\equiv_n b$ 通常 记为 $a\equiv b \mod n$

注: $a\equiv b \mod n \Longleftrightarrow \mathrm{rem}(a,n)=\mathrm{rem}(b,n)$

验证, $a\equiv b \mod n \Longleftrightarrow n\mid(a-b)$

$\Longleftrightarrow \mathrm{rem}(a-b,n)=0$

设 $q_a=\mathrm{qou}(a,n)$, $r_a=\mathrm{rem}(a,n)$

$q_b=\mathrm{qou}(b,n)$ $r_b=\mathrm{rem}(b,n)$

则 $a=q_a n+r_a$, $b=q_b n+r_b$.

不妨设 $r_a\geq r_b$

$a-b=(q_a-q_b)n+r_a-r_b$

$r_a-r_b\in\{0,1,\dots n-1\}$

于是 $\mathrm{rem}(a-b,n)=r_a-r_b$

由此可知 $\mathrm{rem}(a-b,n)=0\Longleftrightarrow r_a=r_b$

称 $\equiv_n$ 为关于 n 的同余关系

§4.4 等价类

定义: 设 $\sim$ 是集合 S 上的等价关系, $a\in S$

$\bar{a}=\{b\in S\mid a\sim b\}$

称 $\bar{a}$ 是 a 关于 $\sim$ 的等价类.

例: $\sim_{cl}$ 的 $\bar{a}$ 是 a 同学所在班的所有同学的集合

例 对于 $\equiv_2$ ~~共有两~~

$\bar{0}=\bar{2}=\bar{4}=\cdots$ 只有两个

$\bar{1}=\bar{3}=\bar{5}=\cdots$ 等价类

命题4.1 设 $\sim$ 是集合 S 上的等价关系

$a, b \in S$

(i) $a \sim b \iff \overline{a} = \overline{b}$

(ii) $a \nsim b \iff \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$

证: (i) "$\Rightarrow$" 设 $x \in \overline{a}$，则 $x \sim a$. 由传递律 $x \sim b$

$\Rightarrow x \in \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \subset \overline{b}$

同理 $\overline{b} \subset \overline{a}$. $\quad \overline{a} = \overline{b}$

"$\Leftarrow$" $\because$ $b \in \overline{b}$ $\therefore$ $b \in \overline{a}$

$\Rightarrow a \sim b$.

(ii) "$\Leftarrow$" 由(i)直接可得

"$\Rightarrow$" 假设 $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$

则 $a \sim x$, $x \sim b$

$\Rightarrow a \sim b$ $\rightarrow\leftarrow$ 因

定义: 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系，$a \in S$. $\overline{a}$ 中的任何元素称为 $\overline{a}$ 的代表元

例: $\equiv_2$ $\quad \overline{0}, \overline{1}$

$\overline{0} = \overline{2k}$, $\overline{1} = \overline{2k+1}$

例 $\sim_{cl}$. 每个同学都是他(她)的班上的代表元

例: 任何一个线性方程组都有一个系数矩阵为阶梯型的代表元

定义: 设 $\sim$ 是 S 上等价关系

$S/\sim \; := \{\overline{a} \mid a \in S\}$

称为 S 关于 $\sim$ 的商集

例 $\mathbb{Z}/\equiv_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

$S/\sim_{cl} = \{$学校中的每个班$\}$

$S/\sim_f = \{f$ 的非空纤维$\}$

$\mathbb{Z}/\equiv_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

定义：设 $\sim$ 是 S 上的等价关系

$$\pi: S \longrightarrow S/\sim, \quad a \longmapsto \bar{a}$$

称为关于 $\sim$ 的商映射（自然投射）

注：π 是满射

例：$\pi: S \longrightarrow S/\sim_{cl}$ 学生的班

$$\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad k \longmapsto \bar{k} = \overline{\mathrm{rem}(k,n)}$$

$$\pi: S \longrightarrow S/\sim_f, \quad s \longmapsto \bar{s}$$ ← s 所在的纤维

定理3.1 设 $f: S \to T$，和 $\pi: S \to S/\sim$，则 $\exists!$ 映射 $\bar{f}: S/\sim \to T$

使得 $f = \bar{f} \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & T \\ & S/\sim_f \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

证：定义 $\bar{f}: S/\sim \to T$, $\bar{a} \longmapsto f(a)$

良定义：设 $\bar{a} = \bar{b}$，则 $a \sim_f b$

即 $f(a) = f(b) \Rightarrow \bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b})$. ✓

单射：设 $\bar{a}, \bar{b} \in S/\sim$, $\bar{a} \neq \bar{b}$

则 $a \not\sim_f b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow \bar{f}(\bar{a}) \neq \bar{f}(\bar{b})$ ✓

$\forall a \in S$

$$\bar{f} \circ \pi(a) = \bar{f}(\bar{a}) = f(a)$$

$$\Rightarrow \bar{f} \circ \pi = f \quad \square$$

§4.5 集合的分划

定义：设 S 是集合。I 是一个指标集

$\forall i\in I$，S_i 是 S 的非空子集

如果 (i) $\forall i,j\in I$，$i\neq j$.

$$S_i\cap S_j=\emptyset$$

(ii)
$$\bigcup_{i\in I} S_i = S$$

则称 $\{S_i \mid i\in I\}$ 是 S 的一个分划 (partition).

例 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系. 则 $S/\sim$ 是 S 的一个分划

设 $U\in S/\sim$. 则 $\exists a\in S$ 使得

$$U=\bar{a}$$

于是 $U\subset S$ 且非空.

若 $\bar{a}\neq\bar{b}$. 则 $\bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$

$\forall a\in S$. $a\in\bar{a} \Rightarrow S=\bigcup_{U\in S/\sim} U$

定理4.2 设 $T=\{S_i \mid i\in I\}$ 是 S 的一个分划. 则令

$$\sim_T=\{(a,b)\in S^2 \mid \exists i\in I,\ a,b\in S_i\}$$

则 $\sim_T$ 是 S 上的等价关系且

$$S/\sim_T = T.$$

证：自反：$\forall a\in S$ $\exists i\in I$，使得 $a\in S_i$

$\Rightarrow a\sim_T a$

对称 ~~$a,b\in S$~~ $a\sim_T b \Rightarrow \exists i\in I$ 使得 $a,b\in S_i \Rightarrow b,a\in S_i \Rightarrow b\sim_T a$

传递：设 $a\sim_T b$，$b\sim_T c$. 则 $\exists i,j\in I$ 使得 $a,b\in S_i$，$b,c\in S_j \Rightarrow S_i\cap S_j\neq\emptyset$

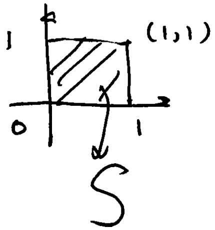
$\Rightarrow i=j \Rightarrow a\sim_T c$.

于是 $\sim_T$ 是等价关系.

设 $s\in S$. $\exists!\, i\in I$. $s\in S_i \Rightarrow \bar{s}=S_i$

$\Rightarrow S/\sim_T=T$ ☐

例：粘合：



$$T_1 = \{\{(0,y),(1,y)\} \mid y \in [0,1]\}$$
$$\cup \{\{(x,y)\} \mid x \in (0,1),\ y \in [0,1]\}$$

$S/\sim_{T_1} =$ 

$$T_2 = \{\{(0,y),(1,1-y)\} \mid y \in [0,1]\} \cup$$
$$\{\{(x,y)\} \mid x \in (0,1),\ y \in [0,1]\}$$

$S/\sim_{T_2}$ 

Möbius 带