回忆： 设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$

(i) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 则

$$\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$$

称为 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 的一个线性组合

(ii) 若 $\exists\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$，不全为零

满足 $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$

则称 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关.

否则称 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性无关

注：本章的所有结论不仅适用于 $\mathbb{R}^n$ 也适用于 $\mathbb{R}^{1\times n}$

不仅适用于 $\mathbb{R}$，也适用于 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.

命题1.1 设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$, $1\le i\le k$

(i) 如果 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}$ 线性相关，则

$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots\vec{v_k}$ 也线性相关

(ii) 如果 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots\vec{v_k}$ 线性无关，

则 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}$ 也线性无关

(iii) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 中某个向量是其它向量的线性组合

(iv) 设 $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ 且 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性无关

则 $\vec{v},\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ $\exists!\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$$

证: (i) 设 $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_i\vec{v_i}=\vec{0}$，其中 $\alpha_1,\ldots\alpha_i\in\mathbb{R}$

不全为零. 则

$$\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_i\vec{v_i}+0\vec{v_{i+1}}+\cdots+0\vec{v_k}=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\alpha_1},\ldots\vec{\alpha_i},\vec{v_{i+1}},\ldots\vec{v_k}$ 线性相关

(ii) (i) 的逆否命题

(iii) "$\Rightarrow$" 设 $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$，其中 $\alpha_1,\ldots\alpha_k\in\mathbb{R}$

不全为零. 不妨设 $\alpha_1\neq 0$. 则

$$\vec{v_1}=\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\vec{v_2}+\cdots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)\vec{v_k}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v_1}$ 是 $\vec{v_2},\ldots,\vec{v_k}$ 的线性组合

"$\Leftarrow$" 不妨设 $\vec{v_1}=\beta_2\vec{v_2}+\cdots+\beta_k\vec{v_k}$, $\beta_2\cdots\beta_k\in\mathbb{R}$

则 $1\cdot\vec{v_1}+(-\beta_2)\vec{v_2}+\cdots+(-\beta_k)\vec{v_k}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{v_1},\ldots,\vec{v_k}$ 线性相关

(iv) "$\Rightarrow$" 设 $\alpha,\beta_1,\cdots\beta_k\in\mathbb{R}$，不全为零

满足

$$\alpha\vec{v}+\beta_1\vec{v_1}+\cdots+\beta_k\vec{v_k}=\vec{0}$$

则 $\alpha\neq\vec{0}$. 否则 $\vec{v_1},\ldots\vec{v_k}$ 将线性相关 $\rightarrow\leftarrow$

$$\vec{v}=\left(\frac{-\beta_1}{\alpha}\right)\vec{v_1}+\cdots+\left(\frac{-\beta_k}{\alpha}\right)\vec{v_k}$$

即 $\vec{v}$ 是 $\vec{v_1},\ldots\vec{v_k}$ 的线性组合.

设 $\vec{v}=\lambda_1\vec{v_1}+\cdots+\lambda_k\vec{v_k}$

$=\mu_1\vec{v_1}+\cdots+\mu_k\vec{v_k}$

其中 $\lambda_1,\ldots\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_k\in\mathbb{R}$

则 $(\lambda_1-\mu_1)\vec{v_1}+\cdots+(\lambda_k-\mu_k)\vec{v_k}=\vec{0}$ ($\because$ $\vec{v_1},\cdots\vec{v_k}$ 线性…

$\Rightarrow$ $\lambda_1=\mu_1,\ldots,\lambda_k=\mu_k$

$\therefore$ 唯一性成立

"$\Leftarrow$" 由 (iii) 直接得出 $\square$

例：设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^n$. 则

$\vec{0},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

证：法1：因为 $\vec{0}$ 本身线性相关

所以 $\vec{0},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关 (命题1(i))

法2：$1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{v}_1+\cdots+0\cdot\vec{v}_k=\vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{0},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

例：设 $\vec{e}^{(j)}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \\ \end{array}$, $j=1,2,\cdots n$

证明：(i) $\vec{e}^{(1)},\cdots,\vec{e}^{(n)}$ 线性~~相~~无关

(ii) $\forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\exists!\ \alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$

使得 $\vec{x}=\alpha_1\vec{e}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{e}^{(n)}$

证：(ii) 设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

则 $\vec{x}=\alpha_1\vec{e}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{e}^{(n)}$

唯一性可直接验证，或者用命题1(iv)

(i) 设 $\beta_1\vec{e}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{e}^{(n)}=\vec{0}$

则 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\beta_1=\cdots=\beta_n=0$

$\Rightarrow$ $\vec{e}^{(1)},\cdots,\vec{e}^{(n)}$ 线性无关.

例：证明 $\mathbb{R}^n$ 中任何 $n+1$ 的向量必然线性相关

证：设 $\vec{v}_j=\begin{pmatrix}v_{1j}\\ \vdots\\ v_{nj}\end{pmatrix}$, $j=1,2,\cdots n+1$

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}$ 使得

$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_{n+1}\vec{v}_{n+1}=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}v_{11}\\ \vdots\\ v_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_{n+1}\begin{pmatrix}v_{1,n+1}\\ \vdots\\ v_{n,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}v_{11}\alpha_1+\cdots+v_{1,n+1}\alpha_{n+1}=0\\ \quad\cdots\\ v_{n1}\alpha_1+\cdots+v_{n,n+1}\alpha_{n+1}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\alpha_1 \\ \vdots \\ x_{n+1}=\alpha_{n+1} \end{cases}$$ 是齐次线性方程组解

$$\Leftrightarrow \quad (H) \begin{cases} v_{11}x_1+\cdots+v_{1,n+1}x_{n+1}=0 \\ \cdots \\ v_{n1}x_1+\cdots+v_{n,n+1}x_{n+1}=0 \end{cases}$$

的解.

由第一章定理3.2 (H)有非零解

于是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v}_{n+1}$ 线性相关. □

对于双重和号的注记

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 则

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)$$

引理1.1 (线性组合引理)

设 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$, $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_l}\in\mathbb{R}^n$.

且 每个 $\vec{u_i}$ 都是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_l}$ 的线性组合

$i=1,2,\cdots k$

如果: $k>l$. 则 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$ 线性相关

证: 设

$$\vec{u_1}=a_{11}\vec{v_1}+\cdots+a_{1l}\vec{v_l}$$
$$\vec{u_2}=a_{21}\vec{v_1}+\cdots+a_{2l}\vec{v_l}$$
$$\vdots$$
$$\vec{u_k}=a_{k1}\vec{v_1}+\cdots+a_{kl}\vec{v_l}$$

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

则 $\alpha_1\vec{u_1}+\cdots+\alpha_k\vec{u_k}$

$$=\alpha_1(a_{11}\vec{v_1}+\cdots+a_{1l}\vec{v_l})+\cdots+\alpha_k(a_{k1}\vec{v_1}+\cdots+a_{kl}\vec{v_l})$$

$$=\alpha_1\left(\sum_{j=1}^{l}a_{1j}\vec{v_j}\right)+\cdots+\alpha_k\left(\sum_{j=1}^{l}a_{kj}\vec{v_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\vec{v_j}\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i a_{ij}\vec{v_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{ij}\vec{v_j} = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_{ij}\right)\vec{v_j}$$

则
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{u_i}\right) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_{ij}\right)\vec{v_j} \quad (*)$$

对 ∀ $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$ 成立.

考虑线性方程组 (H)

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i = 0 ,\quad j=1,2,\cdots l\right.$$

∵ $k>l$. ∴ (H) 有非平凡解, 设为 $x_1=\beta_1,\cdots x_k=\beta_k$ (第一章定理2)

代入 (*) 得

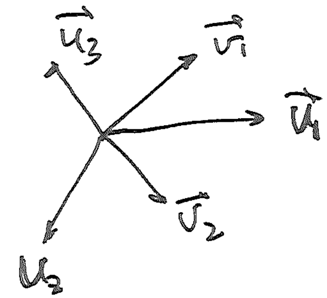
$$\sum_{i=1}^{k}\beta_i\vec{u_i}=\vec{0} \Rightarrow \vec{u_1},\cdots\vec{u_k}$$ 线性相关.

例: 设 $\vec{u_1}=\lambda_1\vec{v}$, $\vec{u_2}=\lambda_2\vec{v}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

则 $\vec{u_1}$ 与 $\vec{u_2}$ 同向或反向.

$\vec{u_1},\vec{u_2}$ 线性无关

设 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性~~相关~~无关 $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$ 是 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 的线性组合



则 $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$ 在 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 确定的平面上

$\Rightarrow \vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$ 线性相关

§1.3 极大线性无关组

定义: 设 T ⊂ $\mathbb{R}^n$ 非空. 如果 T 中每个非空有限子集~~都是子集都是~~线性无关的, 则称 T 是线性无关集

注: 因为 $\mathbb{R}^n$ 中任何 $n+1$ 个向量都线性相关. 所以 T线性无关

无关集, $|T| < n+1$. ~~因此~~ 由命题1.1 中(iv), T 线性无关 $\Leftrightarrow$ T 中元素线性无关

定义: 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 非空. $T \subset S$ 是线性无关(子集). 如果 $\forall \vec{v} \in S \setminus T$

$T \cup \{\vec{v}\}$ 是线性相关的

则称 T 是 S 中的极大线性无关集(组)

注: 设 $\mathcal{L}_S$ 是 S 中所有线性无关组的集合. 则极大线性无关组是 $\mathcal{L}_S$ 中关于 "$\subset$" 的极大元.

引理1.2 (扩充引理) 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 且 $T \subset S$ 是一个线性无关集 则存在 S 的一个极大线性无关组 $\tilde{T}$ 满足 $T \subset \tilde{T}$.

证: 若 T 是极大的, 则结论成立. 否则存在 $\vec{v}_1 \in S \setminus T$ 满足 $T_1 := T \cup \{\vec{v}_1\}$ 是 S 中线性无关集. 若 T_1 是极大的 则结论成立. 否则 $\exists$ ~~且~~ $\vec{v}_2 \in S \setminus T_1$ 满足 $T_2 = T_1 \cup \{\vec{v}_2\}$ 是 S 中线性无关集. 但 S 中任何线性无关集含有的元素个数 $< n+1$. ($\because S \subset \mathbb{R}^n$) 于是上述步骤重复有限步后终止于一个 S 中的极大线性无关集. $\square$

例：设 $S=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$，其中

$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v_3}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

求 S 中含有 $\vec{v_1}$ 的极大线性无关子集

解：$\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}=\vec{0}\iff \alpha_1=\alpha_2=0$

$\Rightarrow \vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关

$\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}+\alpha_3\vec{v_3}=\vec{0} \iff$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\ \alpha_2+2\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_3=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\ \alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases} \quad (H)$$

由定理3.2（第章），(H)有非平凡解

由此可知 $\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ 是 S 的一个极大线性无关组.

类似可知 $\{\vec{v_1},\vec{v_3}\}$ 也是 S 中一个极大的线性无关组

命题1.2 设 $S\subset\mathbb{R}^n$，$S\neq\emptyset$，$S\neq\{\vec{0}\}$

则 (i) S 中有极大线性无关组

(ii) 设 T_1, T_2 是 S 中的两个极大线性无关组. 则 $|T_1|=|T_2|$

证：(i) $\exists\, \vec{v}\neq\vec{0}$ ~~满足~~ $\vec{v}\in S$

则 $\{\vec{v}\}$ 是 S 中线性无关子集.

由扩充引理，S 中有含有 $\vec{v}$ 的极大线性无关组

(ii) 设 $T_1=\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_k}\}$

$T_2=\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_l}\}$

由命题(1.1)(iv) $\forall\, \vec{u_i}\in T_1$，$i=1,\dots,k$

$\vec{u_i}$ 是 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_l}$ 的线性组合

由线性组合引理. $k\leq l$

同理 $l\geq k \Rightarrow k=l$. $\square$

推论1.1 设 $S\subset\mathbb{R}^n$, $T\subset S$ 是 S 中极大线性无关组 $\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_m\}$

则 $\forall\vec{v}\in S$ $\exists!$ $\alpha_1,\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}$

使得 $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_m\vec{v}_m$

证: $\because$ T 是极大线性无关组

$\therefore$ $\vec{v},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_m$ 线性相关

由命题1.1(iv) 结论成立

~~推论1.2. 设 $S\subset\mathbb{R}^n$, $T=\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_m\}\subset S$ 是线性无关集. 如果 $\forall\vec{v}\in S$~~

推论1.2 设 $S\subset\mathbb{R}^n$, $T=\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_m\}\subset S$

如果 $\forall\vec{v}\in S$, $\exists!$ $\alpha_1,\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}$

使得 $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_m\vec{v}_m$

则 T 是 S 中的极大线性无关组

证: 只需验证 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_m$ 线性无关

若线性相关, 由命题1.1(iii)

不妨设

$$\vec{v}_1=\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_m\vec{v}_m,\quad \alpha_2,\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}$$

$$=0\cdot\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_m\vec{v}_m$$

而 $\vec{v}_1=\vec{v}_1=1\cdot\vec{v}_1+0\cdot\vec{v}_2+\cdots+0\cdot\vec{v}_m$

于是 $\vec{v}_1$ 可以表示为系数不同的 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_m$ 的线性组合. 与唯一性矛盾. 由因

推论1.3 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$, r 是 S 中极大线性无关组中元素的个数, T 是 S 中的线性无关子集. 如果 $|T|=r$. 则 T 是极大的

证: 由扩充引理 $\exists$ 极大线性无关组 $\tilde{T}$. 满足 $T\subset\tilde{T}\subset S$

由命题1.2(ii), $|\tilde{T}|=r\Rightarrow T=\tilde{T}$ $\square$