§1.4 子空间

定义：设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 中非空

如果 $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{x} + \vec{y} \in V$ （加法封闭）

$\alpha \vec{x} \in V$ （数乘封闭）

则称 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间

注：V 是子空间 $\Longleftrightarrow \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$

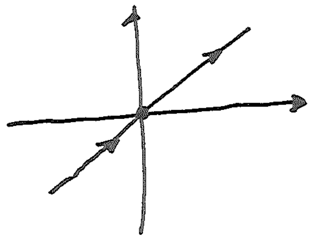
验证："$\Rightarrow$" $\alpha\vec{x}, \beta\vec{y} \in V$ ［数乘封闭］

$\Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$ ［加法封闭］

"$\Leftarrow$" 令 $\alpha = \beta = 1$. 得加法封闭

令 $\beta = 0$ 得数乘封闭

例 过原点的直线是 $\mathbb{R}^2$ 中子空间



例：$\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中平凡的子空间

例 证明：如果 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间

则 $\vec{0} \in V$

证：设 $\vec{x} \in V$. 则 $\vec{0} = 0 \cdot \vec{x} \in V$.

例：设

$$(H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解在 $\mathbb{R}^n$ 中的集合是 V

即 $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle|\ \alpha_1, \cdots \alpha_n \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases} \text{是(H)的解} \right\}$

则 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间

证: $\because \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V \quad \therefore V \neq \emptyset$

设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, 是 (H)

的解 $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

$\cancel{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda \vec{u} +}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j + \mu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \beta_j$$

$= 0.$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$= \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in V$ □

由此可知: 过原点的平面是子空间

由上例可知 不过原点的直线 ~~和平面~~ 都不是子空间

命题 1.3. 任意多个子空间的交仍是子空间

证: 我们只证两个子空间情形. 对多个类似. 设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间

设 $\vec{x}, \vec{y} \in U \cap V$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U$ 且 $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$

$\Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U \cap V$ □

定义: 设 S, T ~~U, V~~ $\subset \mathbb{R}^n$, 非空

$$S + T = \{ \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in S, \vec{y} \in T \}$$

称为 S 与 T 的和.

命题1.4 设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间

则 $U+V$ 是子空间

证: 设 $\vec{x}, \vec{y} \in U+V$.

则 $\exists\ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U,\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

使得 $\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1$

$\vec{y} = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$

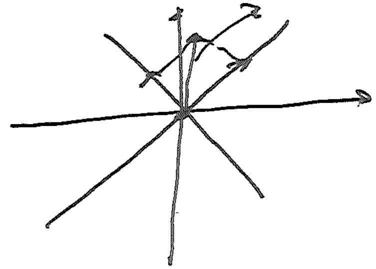
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + \beta(\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

$$= \underbrace{(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2)}_{\in V} \in U+V$$

$\square$

注: 子空间的并一般不是子空间



命题1.5 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in V$. 定义

$$\langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \rangle := \{\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k \mid \alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

则 $\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \rangle$ 是子空间. (称之为由 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 生成的子空间)

证: 设 $\vec{u}, \vec{v} \in \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \rangle$

则 $\exists\ \alpha_1, \cdots \alpha_k,\ \beta_1, \cdots \beta_k \in \mathbb{R}$ 满足

$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$

$\vec{v} = \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k$

设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$　$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

$$= \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i\right)$$

$= \sum_{i=1}^{k} (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)\vec{v_i} \in \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\rangle$

推论1.3 设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$; V是含有 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 的子空间

则 $\langle \vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\rangle \subset V$

证: 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$.

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{v_1}+\dots+\lambda_k\vec{v_k}$$

我们只需证: $\vec{u}\in V$

对 k 归纳: $k=1$. $\lambda_1\vec{v_1}\in V$. [数乘封闭]

设 $k-1$ 时结论成立.

令 $\vec{v} = \lambda_1\vec{v_1}+\dots+\lambda_{k-1}\vec{v_{k-1}}$. 则 $\vec{v}\in V$.

$\vec{u} = \vec{v}+\lambda_k\vec{v_k}\in V$ 因

注1. 由上述推论可知 若 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\in V$, 则它们的任意线性组合也在 V 中.

注: $\langle\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_k}$ 的最小的子空间

注: 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空. 定义

$$\langle S\rangle := \left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v_i} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}^+, \alpha_i\in\mathbb{R}, \vec{v_i}\in S\right\}$$

称为由 S 生成的子空间 且若 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中含有 $\langle S\rangle$ 的子空间. 则 $\langle S\rangle\subset V$.

(自己验证)

定义: 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间 如果 $U\cap V=\{\vec{0}\}$, 则称 $U+V$ 是直和, 记为 $U\oplus V$

命题1.6 设 $U, V\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间 则 $U+V$ 是直和 $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \vec{z}\in U+V$ $\exists!\ \vec{u}\in U, \vec{v}\in V$ 使得 $\vec{z}=\vec{u}+\vec{v}$.

使得 $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}$

证："$\Rightarrow$" 设 $\vec{x}=\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}'+\vec{v}'$

其中 $\vec{u},\vec{u}'\in U$, $\vec{v},\vec{v}'\in V$

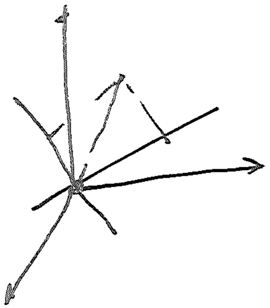
则 $\vec{u}-\vec{u}'=\vec{v}'-\vec{v}\in U\cap V=\{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{u}'$, $\vec{v}=\vec{v}'$

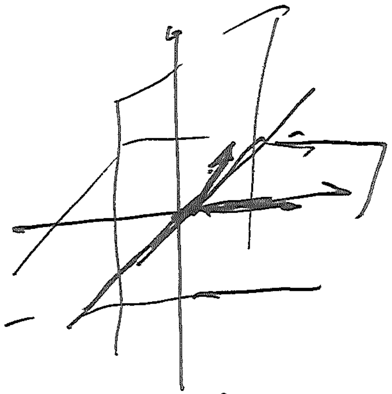
"$\Leftarrow$" 设 $\vec{w}\in U\cap V$

$\vec{w}=\vec{0}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{0}$

由唯一性 $\vec{w}=\vec{0}$. □



唯一



不唯一

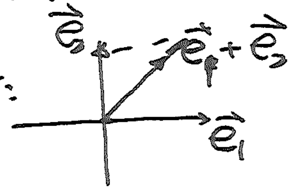
注 $U_1\cap U_2 \subset U_1 \subset U_1+U_2$，$U_1\cap U_2 \subset U_2 \subset U_1+U_2$

例：设 U_1, U_2, U_3 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 分配律

$$(U_1+U_2)\cap U_3=U_1\cap U_3+U_2\cap U_3$$

一般不成立

如：



$U_1=\langle\vec{e}_1\rangle$, $U_2=\langle\vec{e}_2\rangle$

$U_1+U_2\supset\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow U_1+U_2=\mathbb{R}^2 \Rightarrow (U_1+U_2)\cap U_3=U_3$

$U_1\cap U_3=\{\vec{0}\}$, $U_2\cap U_3=\{\vec{0}\}$

$\Rightarrow U_1\cap U_3+U_2\cap U_3=\{\vec{0}\}$

思考：$(U_1\cap U_2)+U_3 \overset{?}{=} (U_1\cap U_3)\cap(U_2\cap U_3)$

§1.5 基底与维数

定义：设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间，$V\neq\{\vec{0}\}$

~~如果~~：设 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\in V$ 满足

(i) $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 线性无关

(ii) $V=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\rangle$

则称 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 是 V 的一组基

命题1.5 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间，$V\neq\{\vec{0}\}$

$\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\in V$. 则

$\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d$ 是 V 的一组基

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 是 V 的一个极大线性无关组.

证："$\Rightarrow$" $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 线性无关

假设 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\}$ 不是V中极大线性无关组. 则 $\exists\vec{v}\in V$, 使得

$\{\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d,\vec{v}\}$ 线性无关

由基的定义：$\vec{v}\in\langle\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d\rangle$

即 $\exists\ \alpha_1\cdots\alpha_d\in\mathbb{R}$ 使得

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{b}_1+\cdots+\alpha_d\vec{b}_d$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}+(-\alpha_1)\vec{b}_1+\cdots+(-\alpha_d)\vec{b}_d=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v},\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 线性相关 $\rightarrow\leftarrow$

反之："$\Leftarrow$" 设 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d$ 是 V 中的极大线性无关组.

则 $\forall\vec{v}\in V$, $\vec{v},\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d$ 线性相关

由命题1.1 (iv) $\vec{v}\in\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\rangle$

$$\Rightarrow\ V\subset\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\rangle$$

$$\Rightarrow\ V=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_d\rangle\ \square$$

注：~~由设 V~~ 在上述命题假设下

$\forall \vec{v} \in V \quad \exists!\ \alpha_1, \dots \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b_1} + \dots + \alpha_d \vec{b_d}$$

[命题1.1 (iv)]

称 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$ 是 $\vec{v}$ 在 $\vec{b_1}, \dots, \vec{b_d}$ 下的坐标

注 由命题1.2. V 中两组基中所含有的元素个数相同

定义：设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $V \neq \{\vec{0}\}$

设 $\vec{b_1}, \dots \vec{b_d}$ 是 V 的一组基

则 d 称为 V 的维数 记为 $\dim V$

此外：$\{\vec{0}\}$ 的维数定义为零

例：$\mathbb{R}^n$ 有自然基底

$$\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

例：设 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad V = \langle \vec{v} \rangle$

则 $\dim V = 1$

例：设 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ 不全为零

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$，

求其解空间的维数

解. 不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 方程解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则方程的解空间为 $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$

因为 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 线性无关，所以 $\dim\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 2$.

过原点平面的维数是 2.

定理1.1（基扩充定理）

设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间，$\dim V = d > 0$，$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ 线性无关，则存在 $\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_d \in V$

使得 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_d$ 是 V 的一组基

证：由扩充引理（引理1.2）

$\exists\ \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_m$ 使得

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_m$ 是 V 中的极大线性无关组

由命题1.7，$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_m$ 是 V 的基且 $m = d$. □

定理1.2（包含定理）

设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且 $U \subseteq V$

则 $U \subsetneq V \Leftrightarrow \dim U < \dim V$

证："$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" 若 $U = \{\vec{0}\}$，则结论显然

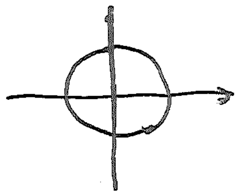
否则设 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 是 U 的基

$\exists\ \vec{v} \in V \setminus U \Rightarrow \vec{v} \notin \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d \rangle$

由命题1.1 (iv) $\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d \in V$ 线性无关

由定理1.1 $\dim(V) > d$ □

例: 设 S 是 $x(x^2+y^2-1)=0$ 的解集



y轴 $\subset S$.

定理 1.3 (维数公式)

设 U_1, U_2, ~~U_3~~ $\subset \mathbb{R}^n$ 是子空间

则 $\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)$

$= \dim U_1 + \dim U_2$

证: 当 $U_1=\{\vec{0}\}$ 或 $U_2=\{\vec{0}\}$ 时

定理显然成立.

设 $U_1\cap U_2 \neq \{0\}$

$\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m$ 是 $U_1\cap U_2$ 的一组基

由基扩充定理 $\exists\ \vec{u}_1,\dots,\vec{u}_s\in U_1$

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_t\in U_2$

使得 $\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m,\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_s$ 是 U_1 的基

$\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_t$ 是 U_2 的基

若 $\alpha_1,\dots,\alpha_m,\ \lambda_1,\dots,\lambda_s,\ \mu_1,\dots,\mu_t\in\mathbb{R}$ 满足

$$\underbrace{\alpha_1\vec{w}_1+\dots+\alpha_m\vec{w}_m}_{\vec{w}}+\underbrace{\lambda_1\vec{u}_1+\dots+\lambda_s\vec{u}_s}_{\vec{u}}$$

$$+\underbrace{\mu_1\vec{v}_1+\dots+\mu_t\vec{v}_t}_{\vec{v}}=\vec{0}$$

$\vec{w}+\vec{u}=-\vec{v}$ $\quad \vec{u}\in U_1,\ \vec{v}\in U_2,\ \vec{w}\in U_1\cap U_2$

$\Rightarrow \vec{v}\in U_1 \Rightarrow \vec{v}\in U_1\cap U_2$

$\exists\ \beta_1,\dots,\beta_m\in\mathbb{R}$

$\vec{v}=\beta_1\vec{w}_1+\dots+\beta_m\vec{w}_m$

$\Rightarrow (\alpha_1+\beta_1)\vec{w}_1+\dots+(\alpha_m+\beta_m)\vec{w}_m+\lambda_1\vec{u}_1+\dots+\lambda_s\vec{u}_s$

$=\vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_s=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1\vec{w}_1+\dots+\alpha_m\vec{w}_m+\mu_1\vec{v}_1+\dots+\mu_t\vec{v}_t=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_m=\mu_1=\dots=\mu_t=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_m,\ \lambda_1,\dots,\lambda_s,\ \mu_1,\dots,\mu_t$ 线性无关

设 $\vec{x} \in U_1 + U_2$

$\vec{x} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$，$\vec{u_1} \in U_1$，$\vec{u_2} \in U_2$

$\exists\ a_1, \dots, a_m,\ b_1, \dots, b_m,\ c_1, \dots, c_s,\ d_1, \dots, d_t \in \mathbb{R}$

$$\vec{u_1} = a_1 \vec{w_1} + \dots + a_m \vec{w_m} + c_1 \vec{u_1} + \dots + c_s \vec{u_s}$$

$$\vec{u_2} = b_1 \vec{w_1} + \dots + b_m \vec{w_m} + d_1 \vec{v_1} + \dots + d_t \vec{v_t}$$

$$\vec{x} = (a_1+b_1)\vec{w_1} + \dots + (a_m+b_m)\vec{w_m} + c_1\vec{u_1} + \dots + c_s\vec{u_s} + d_1\vec{v_1} + \dots + d_t\vec{v_t}$$

$$\in \langle \vec{w_1}, \dots, \vec{w_m}, \vec{u_1}, \dots, \vec{u_s}, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_t} \rangle$$

于是 $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_m}, \vec{u_1}, \dots, \vec{u_s}, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_t}$ ~~是~~

是 U_1+U_2 的一组基

$$\Rightarrow \dim(U_1+U_2) = m+s+t$$

$$= (m+s) + (m+t) - m$$

$$= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

∎

注：当 $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ 时，令 $m=0$ 即可

例：证明：设 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$. 证明

$U_1 + U_2$ 是直和 $\Leftrightarrow \dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

证："$\Rightarrow$". $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
（定理1.3）

"$\Leftarrow$" 定理1.3 $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow U_1 + U_2$ 是直和. ∎

注：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$（$m$行, n列 矩阵的集合）

(H) $x_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + x_n \vec{A}^{(n)} = \vec{0}$

(L) $x_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + x_n \vec{A}^{(n)} = \vec{b}$

(H) 有非零解 $\Leftrightarrow \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 线性相关

(L) 有解（相容）$\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \rangle$

~~因~~

定义：设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^n$，$V=\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\rangle$

则称 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ 是 V 的一组生成元.

也称 V 由 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ 生成的

命题1.8 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是非零子空间

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ 是 V 的一组生成元.

则：$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ 中任何极大线性无关组

是 V 的一组基.

<u>证</u>：设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d$ 是 $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ 的一个

极大线性无关组

$$\forall i\in\{1,\dots k\}$$

$$\vec{v}_i\in\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d\rangle$$

推论1.3 $\Rightarrow$ $\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\rangle\subset\langle\vec{v}_1,\dots\vec{v}_d\rangle$

即 $V\subset\langle\vec{v}_1,\dots\vec{v}_d\rangle$

因为 $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_d\in V$

$\Rightarrow\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d\rangle\subset V$

$\Rightarrow V=\langle\vec{v}_1,\dots\vec{v}_d\rangle$

由 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d$ 的线性无关性.

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_d$ 是 V 的一组基.

例：求 $\langle\underset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}},\underset{\vec{v}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}},\underset{\vec{v}_3}{\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}\rangle$

的一组基.

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1=0\end{matrix}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

$\Rightarrow\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关. 但 $\vec{v}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

于是 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 是 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ 的极大线性无关组. 从而 $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 是 V 的一组基

§2 矩阵的秩

§2.1 行空间和列空间

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $a_{ij}\in\mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)})$$

其中 $\vec{A}_i\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $\vec{A}^{(j)}\in\mathbb{R}^m$

定义: $V_r(A)=\langle\vec{A}_1,\dots,\vec{A}_m\rangle$ 称为 A 的行空间

$V_c(A)=\langle\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}\rangle$ 称为 A 的列空间

$\dim[V_r(A)]$ 称为 A 的行秩

$\dim[V_c(A)]$ 称为 A 的列秩

注: $V_r(A)\subset\mathbb{R}^{1\times n}$, $V_c(A)\subset\mathbb{R}^m$

例: 设 $E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ & &\ddots& \\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$

设 $\vec{e}_i=(0\cdots0\underset{i}{1}0\cdots0)$

则 $V_r(E)=\langle\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\rangle\Rightarrow\dim V_r(E)=n$

$V_c(E)=\langle\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\rangle\Rightarrow\dim V_c(E)=n$

注: $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 线性无关,

$\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}\in\mathbb{R}^{n}$ 线性无关

注: 作业 5. 第4题

<u>回忆</u> I 和 II 类初等行变换

$$\text{I}:\quad A=\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{A}_i\\ \vec{A}_j\\ \vdots\end{pmatrix}\longrightarrow B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{A}_j\\ \vec{A}_i\\ \vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \cdots i\\ \cdots j\\ \\ \end{array}$$

$$\text{II}:\quad A=\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{A}_i\\ \vec{A}_j\\ \vdots\end{pmatrix}\longrightarrow B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vec{A}_i\\ \vec{A}_j+\lambda\vec{A}_i\\ \vdots\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \cdots i\\ \cdots j\\ \\ \end{array}$$

这里, $\lambda\in\mathbb{R}$

I 和 II 类初等列变换

$$\text{I}:\quad A=(\cdots\vec{A}^{(i)}\cdots\vec{A}^{(j)}\cdots)\longrightarrow B=(\cdots\overset{i}{\vec{A}^{(j)}},\cdots\overset{j}{\vec{A}^{(i)}}\cdots)$$

$$\text{II}:\quad A=(\cdots\vec{A}^{(i)}\cdots\vec{A}^{(j)}\cdots)\longrightarrow B=(\cdots\vec{A}^{(i)},\cdots\vec{A}^{(j)}+\lambda\vec{A}^{(i)}\cdots)$$

其中 $\lambda\in\mathbb{R}$, $i\neq j$

引理2.1 设B是A通过有限次I,II类初等行变换得到的矩阵. 则 $V_r(B)=V_r(A)$

证: 只要证 B是通过一次I或II类变换得到时结论成立即可

设B是通过I类初等行变换得到

则 $V_r(A)=\langle\vec{A}_1,\dots\vec{A}_i,\dots\vec{A}_j\dots\vec{A}_m\rangle$

$=\langle\vec{A}_1,\dots\vec{A}_j,\dots\vec{A}_i,\dots\vec{A}_m\rangle=V_r(B)$

设B通过II类初等行变换得到

则: $V_r(B)=\langle\vec{A}_1,\dots,\vec{A}_i,\dots,\vec{A}_j+\lambda\vec{A}_i,\dots\vec{A}_m\rangle$

$\because i\neq j$ $\therefore$ $\vec{A}_j=(\vec{A}_j+\lambda\vec{A}_i)-\lambda\vec{A}_i$

$\in V_r(B)$

由推论1.3 $\underset{V_r(A)}{\underset{\parallel}{\langle\vec{A}_1,\dots\vec{A}_i,\dots\vec{A}_j,\dots\vec{A}_m\rangle}}\subset V_r(B)$

$V_r(A)\subset V_r(B)$

反之: 由 $\vec{A}_j+\lambda\vec{A}_i\in V_r(A)$ 和推论1.3 可知 $V_r(B)\subset V_r(A)$ ∎

引理2.2 设B是由A通过有限次I,II类列变换得到. 则 $V_c(B)=V_c(A)$

例: 设 $A=\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \boxed{2} & * & \cdots & * & * & * \\ & & & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{k} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & & & & & & \end{pmatrix}_{m\times n}$

其中 $\boxed{1},\dots\boxed{k}\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $*\in\mathbb{R}$

证明 A的行秩为k. 只要证

证: $V_r(A)=\langle\vec{A}_1,\dots\vec{A}_k\rangle$ (命题1.8)

$\vec{A}_1,\dots,\vec{A}_k$ 线性无关

设 $\alpha_1\vec{A}_1+\alpha_2\vec{A}_2+\dots+\alpha_k\vec{A}_k=\vec{0}$

$\because$ A是阶梯型

$\alpha_1\boxed{1}=0\Rightarrow\alpha_1=0\Rightarrow\alpha_2\boxed{2}=0$

$\Rightarrow\alpha_2=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow\alpha_k=0$

$\Rightarrow\vec{A}_1,\vec{A}_2,\dots,\vec{A}_k$ 线性无关 ∎

引理2.3 设B由A通过若干次第I,II类初等行变换得出. 则

$$\dim[V_c(A)] = \dim[V_c(B)]$$

<u>证:</u> 由引理2.2. 不妨设 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(d)}$ 是 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(d)},\dots,\vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组

断言 $\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(d)}$ 也是 $\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(d)},\dots,\vec{B}^{(n)}$ 的极大线性无关组.

<u>断言的证明:</u> 设 (H_A), (H_B) 分别是 A, B 为系数矩阵的齐次线性方程组.

由第一章引理2.1. (H_A) 与 (H_B) 等价

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{B}^{(d)} = \vec{0}$$

则 $\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{B}^{(d)} + 0\vec{B}^{(d+1)} + \dots + 0\vec{B}^{(n)} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 是 (H_B) 的解. 从而是 (H_A) 的解

由此可知

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{A}^{(d)} + 0\vec{A}^{(d+1)} + \dots + 0\vec{A}^{(n)} = \vec{0}$$

14

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{A}^{(d)} = \vec{0}$$

于是 $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_d \vec{A}^{(d)} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(d)}$$ 线性无关

设 $k \in \{d+1,\dots,n\}$ 使得

$\exists\ \beta_1,\dots,\beta_d \in \mathbb{R}$. $\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{A}^{(d)} - \vec{A}^{(k)} = \vec{0}$

$\vec{A}^{(k)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{A}^{(d)} \Rightarrow \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{A}^{(d)} - \vec{A}^{(k)} = \vec{0}$

则
$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k\text{-} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ 是 (H_A) 的解. 从而也是 (H_B) 的解

即 $\beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_d \vec{B}^{(d)} - \vec{B}^{(k)} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B}^{(k)} \in \langle \vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(d)} \rangle$. 断言成立

由命题1.8 $\dim V_c(A) = \dim V_c(B) = d$ □