①

回忆：设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A \xrightarrow[\text{变换}]{\text{I, II 行}} B$ $\begin{cases} V_r(A) = V_r(B) & [\text{引理2.1}] \\ \dim V_c(A) = \dim V_c(B) & [\text{引理2.3}] \end{cases}$

$A \xrightarrow[\text{变换}]{\text{I, II 列}} B$ $V_c(A) = V_c(B)$ [引理2.2]

§2 秩定理

定理2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则 $\dim V_r(A) = \dim V_c(A)$

证：$A \xrightarrow{\text{I, II 行}} B = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & \boxed{1} & * \cdots * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{2} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{r} & * \cdots & * \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{I 列}} C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{2} & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & \boxed{r} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{II 列}} D \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{r} & 0 \cdots & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}$

~~$\dim V_r(D) = \dim V_c(D) = k$~~

$k = \dim V_c(D) \xRightarrow{\text{引理2.2}} k = \dim V_c(C)$

$\xRightarrow{\text{引理2.2}} k = \dim V_c(B) \xRightarrow{\text{引理2.3}} k = \dim V_c(A)$

$k = \dim V_r(B) \xrightarrow{\text{引理2.1}} k = \dim V_r(A)$

[§2.1 例1]

于是 $\dim V_r(A) = \dim V_c(A)$ ∎

定义：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则 $\dim V_r(A)$ 称为 A 的秩，记为 $\operatorname{rank}(A)$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

求 $\operatorname{rank}(A)$

$A \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=2$

例：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 证明：

$\mathrm{rank}(A)\leq\min(m,n)$

证：$V_r(A)\subset\mathbb{R}^{1\times n}$

$\Rightarrow \dim V_r(A)\leq\dim\mathbb{R}^{1\times n}=n$

同理 $\dim V_c(A)\leq m$

由定理2.1 $\mathrm{rank}(A)\leq\min(m,n)$

注：若 $\mathrm{rank}(A)=m$，则称A行满秩

若 $\mathrm{rank}(A)=n$，则称A列满秩

若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A)=n$，

则称 A 满秩

§2-3 秩的应用

定理2.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$H_A$ 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组，则

(H_A) 有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)<n$

（即 A 非列满秩）

证：(H_A)：$x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}=\vec{0}$

"$\Rightarrow$" 设 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 是 (H_A) 的非零解，则

$\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\vec{0} \Rightarrow \vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}$

线性相关 $\Rightarrow \dim V_c(A)<n$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A)<n$

"$\Leftarrow$" 由 $\dim V_c(A)<n$

$\Rightarrow \vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}$ 线性无关（命题1.8）

$\Rightarrow \exists\ \beta_1,\cdots\beta_n\in\mathbb{R}$

$\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}=\vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ 是 (H_A) 的非零解.

定理2.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\vec{b}\in\mathbb{R}^m$

(L) 是以 $(A|\vec{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 则

(L) 相容 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A|\vec{b})$

证: 设 $B=(A|\vec{b})$，$\vec{A}^{(j_1)},\dots\vec{A}^{(j_d)}$ 是 A 的列空间 $V_c(A)$ 的一组基.

$\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{” }\checkmark}$

(L): $x_1\vec{A}^{(1)}+\dots+x_n\vec{A}^{(n)}=\vec{b}$

“$\Rightarrow$” (L) 有解 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. 则

$\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\dots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\vec{b}$

$\Longleftrightarrow \vec{b}\in V_c(A)=\langle\vec{A}^{(j_1)},\dots\vec{A}^{(j_d)}\rangle$

$\cancel{\Leftrightarrow \dim V_c(A)=\dim V(\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(n)})}$

$\Longleftrightarrow \vec{A}^{(j_1)},\dots\vec{A}^{(j_d)}$ 是 $\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(n)},\vec{b}$ 的 ~~极大线性无关组合~~ 极大线性无关组

$\Longleftrightarrow \vec{A}^{(j_1)},\dots\vec{A}^{(j_d)}$ 是 $V_c(B)$ 的一组基 命题1.8

$\Longleftrightarrow \dim V_c(B)=d$

$\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ ▨

例: (L) $\begin{cases}x+y=1\\2x-y=2\\5x+2y=5\end{cases}$ 是否相容

$$B=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1\\2&-1\\5&2\end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix}1\\2\\5\end{matrix}\right.\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-3&0\\5&2&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-5r_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-3&0\\0&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-3&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A)=2$. $\mathrm{rank}(B)=2$ 相容

$(\tilde{L})$ $\begin{cases}x+y=1\\2x-y=2.01\\5x+2.01y=5\end{cases}$

$$\tilde{B}=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&-1&2.01\\5&2.01&5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-3&0.01\\0&0&-0.01\times\frac{2.99}{3}\end{array}\right)$$

$(\tilde{L})$ 不相容

定义：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间记为 V_A.

注：由讲义2-2，page 1 的最后一个例子可知

$V_A\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间.

定理2.4 [对偶~~定~~定理（方程版）]

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A)+\dim(V_A)=n$

证：设 $r=\operatorname{rank}(A)$. 为了简化符号

设 $\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基

则 $\forall j\in\{r+1,\cdots,n\}$ $\exists\,\alpha_{1j},\cdots\alpha_{rj}\in\mathbb{R}$

使得

$$\vec{A}^{(j)}=\alpha_{1j}\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_{rj}\vec{A}^{(r)}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1j}\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_{rj}\vec{A}^{(r)}+0\vec{A}^{(r+1)}+\cdots+0\vec{A}^{(j-1)}+(-1)\vec{A}^{(j)}+0\vec{A}^{(j+1)}+\cdots+0\vec{A}^{(n)}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_j=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{rj}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \\ -j\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$ 都在 V_A 中，$j=r+1,\cdots n$

$\because$ $\vec{v}_{r+1},\cdots\vec{v}_n$ 线性无关

$\therefore$ $\dim V_A\geq n-r$.

设 $\vec{u}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\in V_A$

$$\vec{u}+\beta_{r+1}\vec{v}_{r+1}+\cdots+\beta_n\vec{v}_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in V_A$$

$$\Rightarrow \lambda_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\lambda_r\vec{A}^{(r)}+0\vec{A}^{(r+1)}+\cdots+0\vec{A}^{(n)}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\cdots\lambda_r=0$$

$$\Rightarrow \vec{u}=(-\beta_{r+1})\vec{v}_{r+1}+\cdots+(-\beta_n)\vec{v}_n$$

$\Rightarrow$ $\therefore$ $\vec{v}_{r+1},\cdots\vec{v}_n$ 是 V_A 的基

$\Rightarrow$ $\dim V_A=n-r$ ☐

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&-1&0&1\\5&-1&-2&3\end{pmatrix}$

求 V_A 的一组基

解：$A \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&1&1\\0&-6&3&3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&-2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A)=2 \Rightarrow \dim V_A=2$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 0 \\ -2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+x_3 \\ x_4=2x_2-x_3 \end{cases} \quad V_A=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

§3 线性映射

记号：$\mathbb{R}^n$ 中的零向量 $\vec{0}_n$

$\mathbb{R}^m$ 中 · · · · · · $\vec{0}_m$

§3.1 定义和例子

定义：设 $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是映射

~~如果~~ $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$，$\alpha\in\mathbb{R}$

$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})$

$\varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\varphi(\vec{x})$

则称 φ 是线性映射

注：$\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性的

$\Leftrightarrow \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$.

验证："$\Rightarrow$" $\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})$

$=\varphi(\alpha\vec{x})+\varphi(\beta\vec{y})$ [定义(i)]

$=\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$ [定义(ii)]

"$\Leftarrow$" 令 $\alpha=\beta=1$，得定义(i)

令 $\beta=0$ 得定义(ii)

例：$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，$\vec{x} \longmapsto \vec{0}_m$ 是线性的

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \vec{0}_m$$

$$\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y}) = \alpha\cdot\vec{0}_m + \beta\vec{0}_m = \vec{0}_m$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y}).$$

注 φ 称为零映射

例：$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$，$\vec{x} \longmapsto \vec{x}$ 是线性的

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$$

$$\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y})$$

$\Rightarrow$ φ 线性

注：φ 称为恒同映射

例：设 $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性的

则有：$\varphi(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$

证：$\varphi(\vec{0}_n) = \varphi(\vec{0}_n+\vec{0}_n) = \varphi(\vec{0}_n)+\varphi(\vec{0}_n)$

$\Rightarrow \varphi(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$ □

例：设 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}_n\}$

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$，$\vec{x} \longmapsto \vec{x}+\vec{v}$ 不是线性的

$\because \varphi(\vec{0}_n) = \vec{0}_n + \vec{v} = \vec{v} \neq \vec{0}_n$

非平凡平移不是线性的.

命题3.1 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$，$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

(i) $\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k) = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1)+\cdots+\alpha_k\varphi(\vec{v}_k)$

(ii) 如果 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性相关，则 $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_k)$ 也线性相关

证：(i) 对 k 归纳

$k=1$. 定义(ii). 设 $k-1$ 时结论成立

$$\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1}+\alpha_k\vec{v}_k)$$

$$=\varphi(\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1})+\varphi(\alpha_k\vec{v}_k) \quad [\text{定义(i)}]$$

$$=\alpha_1\varphi(\vec{v}_1)+\cdots+\alpha_{k-1}\varphi(\vec{v}_{k-1})+\alpha_k\varphi(\vec{v}_k)$$

[归纳假设和定义(ii)]

(ii) 设 $\beta_1,\cdots\beta_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\beta_k\vec{v}_k=\vec{0}_n$$

$$\varphi(\beta_1\vec{v}_1+\cdots+\beta_k\vec{v}_k)=\varphi(\vec{0}_n)=\vec{0}_m$$

由(i) $\beta_1\varphi(\vec{v}_1)+\cdots+\beta_k\varphi(\vec{v}_k)=\vec{0}_m$ ☒

例：设 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是映射(函数)

则 f 是线性的 $\Longleftrightarrow$ $\exists\,\alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$

使得 $\forall\,\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$

$$f(\vec{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

证："$\Rightarrow$" 设 $\alpha_j=f(\vec{e}^{(j)})$, $j=1,2,\cdots n$

$$\vec{x}=x_1\vec{e}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{e}^{(n)}$$

$$f(\vec{x})=f(x_1\vec{e}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{e}^{(n)})$$

$$=x_1f(\vec{e}^{(1)})+\cdots+x_nf(\vec{e}^{(n)}) \quad [\text{命题}(i)]$$

$$=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(\vec{x}+\vec{y})=f\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}\right)=\alpha_1(x_1+y_1)+\cdots+\alpha_n(x_n+y_n)$$

$$=(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)+(\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ny_n)$$

$$=f(\vec{x})+f(\vec{y})$$

$$f(\lambda\vec{x})=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\right)=\alpha_1(\lambda x_1)+\cdots+\alpha_n(\lambda x_n)$$

$$=\lambda(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)=\lambda f(\vec{x}) \quad ☒$$

例：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ 不是线性的

定理3.1（线性映射基本定理）
设 $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，
$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任意 n 个向量
则存在唯一的线性映射
$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 使得 $\varphi(\vec{b}_i) = \vec{v}_i$

$i = 1, 2, \dots, n$

证：由命题1.7下的注可知
$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
使得 $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$

定义：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$

则 φ 是良定义的 且
$\varphi(\vec{b}_i) = \vec{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

再设 $\vec{y} = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_n \vec{b}_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\varphi(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \varphi\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{b}_i\right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \vec{b}_i\right)\right)$

(8)

$= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \vec{b}_i\right)$

[φ 的定义]

$= \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) \vec{v}_i$

$= \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i\right) + \mu \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \vec{v}_i\right)$

[φ 的定义]

$= \lambda \varphi(\vec{x}) + \mu \varphi(\vec{y})$

于是 φ 存在且线性.

再设 $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性且
$\psi(\vec{b}_i) = \vec{v}_i$, $i = 1, \dots, n$

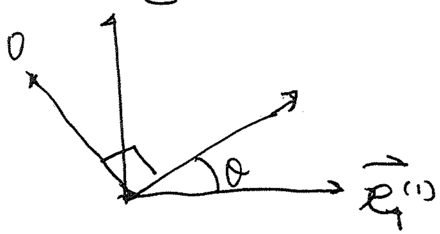
则 $\psi(\vec{x}) = \psi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(\vec{b}_i)$

[命题3.1]

$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i = \varphi(\vec{x})$. 唯一. $\square$

例：$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 满足，线性

$$\varphi(\vec{e}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{e}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$\forall \vec{x} \in \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. $\quad \varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1 \vec{e}^{(1)} + x_2 \vec{e}^{(2)})$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \cos\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}$$

例：嵌入与投影：

$\mathbb{R}^n$ 标准基 $\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}$

$\mathbb{R}^m$ 标准基 $\vec{\varepsilon}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}m$, $\cdots$ $\vec{\varepsilon}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}m$

情形1 $n \leq m$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性且满足

$$\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \vec{\varepsilon}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots n$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \varphi(x_1 \vec{e}^{(1)} + \dots + x_n \vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1 \varphi(\vec{e}^{(1)}) + \dots + x_n \varphi(\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1 \vec{\varepsilon}^{(1)} + \dots + x_n \vec{\varepsilon}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} m-n$$

情形2. $\quad n \geq m$

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 线性，且满足

$$\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \vec{\varepsilon}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots m$$

$$\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \vec{0}_m, \quad j = m+1, \dots n$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \varphi(x_1 \vec{e}^{(1)} + \dots + x_m \vec{e}^{(m)} + x_{m+1} \vec{e}^{(m+1)} + \dots + x_n \vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1 \varphi(\vec{e}^{(1)}) + \dots + x_m \varphi(\vec{e}^{(m)})$$

$$= x_1 \vec{\varepsilon}^{(1)} + \dots + x_m \varphi(\vec{e}^{(m)}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

§3.2 线性映射下的子空间

命题 3.2. 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性

(i) 如果 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间 则

$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ 是子空间且

$$\dim(U) \geq \dim(\varphi(U)).$$

(ii) 如果 $V \subset \mathbb{R}^m$ 是子空间. 则

$\varphi^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间

证: (i) 设 $\vec{x}, \vec{y} \in \varphi(U)$. 则

$\exists\, \vec{u}, \vec{v} \in U$ 使得 $\varphi(\vec{u}) = \vec{x}$, $\varphi(\vec{v}) = \vec{y}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$$

$$= \varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \quad [\varphi\text{线性}]$$

$\because \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U \therefore \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \varphi(U)$

即: $\varphi(U)$ 是子空间.

设 $\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_d$ 是 $\varphi(U)$ 的一组基

则 $\exists\, \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_d \in U$ 满足

$$\varphi(\vec{u}_i) = \vec{x}_i, \quad i = 1, \cdots d$$

由命题3.1 (ii) $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_d$ 线性无关

$$\Rightarrow \quad \dim U \geq d = \dim \varphi(U)$$

(ii) 设 $\vec{u}, \vec{v} \in \varphi^{-1}(V)$. 则

$\exists\, \vec{x}, \vec{y} \in V$ 满足

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{x}, \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{y}$$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$$

$$= \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \varphi^{-1}(V). \quad \blacksquare$$

定义：设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性

称 $\varphi^{-1}(\{\vec{0}_m\})$ 为 φ 的核，记为 $\ker(\varphi)$

称 $\varphi(\mathbb{R}^n)$ 为 φ 的像空间，记为 $\mathrm{im}(\varphi)$

注：$\ker(\varphi) \subset \mathbb{R}^n$，$\mathrm{im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^m$

都是子空间.

命题3.3 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性映射

则：φ 是单射 $\Leftrightarrow$ $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_n\}$

证："$\Rightarrow$" 因为 $\varphi(\vec{0}_n) = \vec{0}_m$ 且 φ 单

所以 $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_n\}$

"$\Leftarrow$" 设 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y})$

则 $\varphi(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_m \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \ker(\varphi) = \{\vec{0}_n\}$

$\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}_n \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$. $\boxtimes$

定理3.2 （对偶定理. 映射版） ⑪

设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性. 则

$\dim[\ker(\varphi)] + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n$

证：设 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ 是 $\ker(\varphi)$ 的一组基

由基扩充定理. $\mathbb{R}^n$ 有一组基

$\vec{u}_1, \dots \vec{u}_d, \vec{u}_{d+1}, \dots \vec{u}_n$

断言：$\varphi(\vec{u}_{d+1}), \dots \varphi(\vec{u}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\varphi)$ 的基

断言的证明：

设 $\beta_{d+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 满足

$\beta_{d+1}\varphi(\vec{u}_{d+1}) + \cdots + \beta_n \varphi(\vec{u}_n) = \vec{0}_m$

则 $\varphi(\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \beta_n \vec{u}_n) = \vec{0}_m$

$\Rightarrow \beta_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \beta_n \vec{u}_n \in \ker(\varphi)$

$\Rightarrow \exists\, \beta_1, \dots \beta_d \in \mathbb{R}$ 使得

$\beta_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \beta_n \vec{u}_n = \beta_1 \vec{u}_1 + \cdots + \beta_d \vec{u}_d$.

$(-\beta_1)\vec{u}_1 + \cdots + (-\beta_d)\vec{u}_d + \beta_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \beta_n\vec{u}_n = \vec{0}_n$

$\because$ $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_d, \vec{u}_{d+1}, \cdots, \vec{u}_n$ 线性无关

$\therefore$ $\beta_{d+1} = \cdots = \beta_n = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi(\vec{u}_{d+1}), \cdots \varphi(\vec{u}_n)$ 线性无关

设 $\vec{x} \in \mathrm{im}(\varphi)$. 则 $\exists\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$\varphi(\vec{u}) = \vec{x}$

设 $\vec{u} = \underbrace{\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_d\vec{u}_d}_{\vec{v}} + \alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$

$\vec{x} = \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v} + \alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n)$

$= \varphi(\vec{v}) + \varphi(\alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n)$

$= \vec{0}_m + \alpha_{d+1}\varphi(\vec{u}_{d+1}) + \cdots + \alpha_n\varphi(\vec{u}_n)$

[$\vec{v} \in \ker(\varphi)$ 和命题3.1

$= \alpha_{d+1}\varphi(\vec{u}_{d+1}) + \cdots + \alpha_n\varphi(\vec{u}_n)$

断言成立

于是 $\dim \mathrm{im}(\varphi) = n - d$ $\boxtimes$

推论3.1 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性

(i) φ 是单射 $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n$

(ii) 设 $m = n$. 则

φ 单 $\Leftrightarrow$ φ 满

证: (i) φ 单 $\Leftrightarrow$ $\dim \ker(\varphi) = 0$ [命题3.3]

$\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n$ [维数定理]

(ii) φ 单 $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{im}(\varphi)) = n$

[(i)]

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}^n$ [包含定理

$\Leftrightarrow$ φ 满 $\boxtimes$

§3.3 线性映射在

标准基下的矩阵表示

设 $\mathbb{R}^n$ 的标准基 $\vec{e}^{(1)}, \cdots \vec{e}^{(n)}$

$\mathbb{R}^m$ 的 ---- $\vec{\varepsilon}^{(1)}, \cdots \vec{\varepsilon}^{(m)}$

定义：设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性.

$$\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j=1,2,\cdots n$$

矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$

是 φ 在标准基下的矩阵

注：由定理3.1 A 的唯一的记为 A_φ.

例：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 零映射

$$A_\varphi = (\underbrace{\vec{0}_m, \cdots \vec{0}_m}_{n}) = O_{m\times n}$$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 恒同

$$A_\varphi = (\vec{e}^{(1)}, \cdots \vec{e}^{(n)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

命题3.4 设 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线性

φ 在标准基下的矩阵为

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

则 $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots x_n \vec{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

证：由 $\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \vec{A}^{(j)}$, $j=1,\cdots n$ 得

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \varphi(x_1\vec{e}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{e}^{(n)}) \\ &= x_1\varphi(\vec{e}^{(1)}) + \cdots + x_n\varphi(\vec{e}^{(n)}) \\ &= x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxtimes$

注 由上述命题

$$\ker(\varphi)=V_A \text{ 且 } \mathrm{im}(\varphi)=V_c(A)$$

例：$\varphi: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \\ x_1-x_2-x_3-x_4-x_5 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5 \end{pmatrix}$$

求：$\ker(\varphi)$ 和 $\mathrm{im}(\varphi)$ 的基

解 $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A_\varphi)=2$. $\Rightarrow \dim \mathrm{im}(\varphi)=2$

$\Rightarrow \dim \ker(\varphi)=3$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

$$\ker(\varphi)=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{im}(\varphi)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

定义：$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 则

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 满足

$\varphi(\vec{e}^{(j)}) = \vec{A}^{(j)}$ 的线性映射. 称为 A 对应的线性映射

注：由定理3.1. φ 唯一, 记为 φ_A 且 φ_A 在标准基下的矩阵为 A

例：证明 方程组对偶定理 与 映射版是一回事儿

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 则

$$\ker(\varphi_A)=V_A \quad \mathrm{im}(\varphi_A)=V_c(A)$$

$$\dim\ker(\varphi_A)+\dim \mathrm{im}(\varphi_A)=n$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim V_A + \dim V_c(A) = n$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim V_A + \mathrm{rank}(A) = n \quad \square$$