更正板书：线性映射基本定理中关于映射 φ 的线性性的验证：

设 $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意向量

定义映射 $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \longmapsto x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$

其中 $\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + \dots + x_n\vec{b}_n$，$x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$

验证 φ 是线性的.

设 $\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + \dots + y_n\vec{b}_n$，$y_1, \dots y_n \in \mathbb{R}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \varphi\left(\alpha\sum_{i=1}^n x_i\vec{b}_i + \beta\sum_{i=1}^n y_i\vec{b}_i\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)\vec{b}_i\right) \quad [\mathbb{R}^n \text{中线性运算}]$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i)\vec{v}_i \quad [\varphi \text{的定义}]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^n x_i\vec{v}_i + \beta\sum_{i=1}^n y_i\vec{v}_i \quad [\mathbb{R}^m \text{中线性运算}]$$

$$= \alpha\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y}) \quad [\varphi \text{的定义}]$$

于是 φ 线性

回忆：设 $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 线性

$$A_\varphi = (\varphi(\vec{e}^{(1)}), \dots, \varphi(\vec{e}^{(n)})) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

是 φ 在标准基 $\vec{e}^{(1)}, \dots, \vec{e}^{(n)}$；$\vec{\varepsilon}^{(1)}, \dots \vec{\varepsilon}^{(m)}$ 下的矩阵.

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\varphi_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 满足

$\varphi_A(\vec{e}^{(j)}) = \vec{A}^{(j)}$，$j = 1, 2, \dots n$. 的线性映射

称 φ_A 是矩阵 A 对应的线性映射

符号：设 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的所有线性映射的集合.

定理4.1 设
$$\Phi: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$$
$$\varphi \longmapsto A_\varphi$$

则 Φ 是双射，且 Φ^{-1} 是
$$\Psi: \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$A \longmapsto \varphi_A.$$

证：$\Phi\circ\Psi(A) = \Phi(\varphi_A)$ [Ψ 的定义]

$= A_{(\varphi_A)}$ [Φ 的定义]

$= \left(\varphi_A(\vec{e}^{(1)}), \ldots, \varphi_A(\vec{e}^{(n)})\right)$ [$A_{(\varphi_A)}$ 的定义]

$= \left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}\right)$ [φ_A 的定义]

$= A$

于是 $\Phi\circ\Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$

反之：$\Psi\circ\Phi(\varphi) = \Psi(A_\varphi)$ [Φ 的定义]

$= \varphi_{(A_\varphi)}$ [Ψ 的定义]

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\varphi_{(A_\varphi)}(\vec{e}^{(j)}) = \vec{A}_\varphi^{(j)}$ [$\varphi_{(A_\varphi)}$ 的定义]

$= \varphi(\vec{e}^{(j)})$ [A_φ 的定义]

由线性映射基本定理的唯一性
$$\varphi_{(A_\varphi)} = \varphi$$

即 $\Psi\circ\Phi(\varphi) = \varphi$. $\Rightarrow \Psi\circ\Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$

$\square$

注：~~由上述定理可知 $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 对在标准基下矩阵对应的线性映射是 φ 本身.~~

例：设 $O_{m\times n}$ 是零矩阵

$$\varphi_{O_{m\times n}}(\vec{e}^{(j)}) = \vec{O}^{(j)}_{m\times n} = \vec{O}_m,\ j=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \varphi_{O_{m\times n}}(x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1\varphi_{O_{m\times n}}(\vec{e}^{(1)})+\dots+x_n\varphi_{O_{m\times n}}(\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1\vec{O}_m+\dots+x_n\vec{O}_m = \vec{O}_m$$

$\varphi_{O_{m\times n}}$ 对应零映射

例：设 E_n 是 n 阶单位方阵

$$\varphi_{E_n}(\vec{e}^{(j)}) = \vec{E}_n^{(j)} = \vec{e}^{(j)},\ j=1,\dots,n$$

$$\varphi_{E_n}(x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1\varphi_{E_n}(\vec{e}^{(1)})+\dots+x_n\varphi_{E_n}(\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)}$$

$\Rightarrow \varphi_{E_n}$ 是恒同.

注：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则

$$V_A=\ker(\varphi_A),\quad V_c(A)=\operatorname{im}(\varphi_A)$$

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)}$

$$\varphi_A(\vec{x}) = \varphi_A(x_1\vec{e}^{(1)}+\dots+x_n\vec{e}^{(n)})$$

$$= x_1\varphi_A(\vec{e}^{(1)})+\dots+x_n\varphi_A(\vec{e}^{(n)}) \quad [\varphi_A\text{线性}]$$

$$= x_1\vec{A}^{(1)}+\dots+x_n\vec{A}^{(n)} \quad [\varphi_A\text{定义}]$$

$$\vec{x}\in\ker(\varphi_A) \iff x_1\vec{A}^{(1)}+\dots+x_n\vec{A}^{(n)}=\vec{O}_m$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in V_A$$

$$\iff \vec{x}\in V_A$$

由此得出：$\ker(\varphi_A)=V_A$

因为 $\mathrm{im}(\varphi_A)=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^m \mid \exists\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n;\ \varphi_A(\vec{x})=\vec{y}\}$

所以 由 $\varphi_A(\vec{x}) = x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}$

可以 $\mathrm{im}(\varphi_A) = V_c(A)$.

§4.2 矩阵的线性运算

命题4.1 设 $\varphi,\ \psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

定义:
$$\varphi+\psi:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\quad \vec{x}\longmapsto\varphi(\vec{x})+\psi(\vec{x})$$

$$\alpha\varphi:\ \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\quad \vec{x}\longmapsto\alpha\varphi(\vec{x})$$

则: $\varphi+\psi$ 和 $\alpha\varphi$ 都是线性映射

证: 设 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$

$(\varphi+\psi)(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})$

$=\varphi(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})+\psi(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})$ [定义] ④

$=\lambda\varphi(\vec{x})+\mu\varphi(\vec{y})+\lambda\psi(\vec{x})+\mu\psi(\vec{y})$ [线性]

$=\lambda[\varphi(\vec{x})+\psi(\vec{x})]+\mu[\varphi(\vec{y})+\psi(\vec{y})]$

$=\lambda[(\varphi+\psi)(\vec{x})]+\mu[(\varphi+\psi)(\vec{y})]$

$\Longrightarrow\quad \varphi+\psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

$(\alpha\varphi)(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})$

$=\alpha\varphi(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})$ [定义]

$=\alpha(\lambda\varphi(\vec{x})+\mu\varphi(\vec{y}))$ [线性]

$=\lambda\alpha\varphi(\vec{x})+\mu\alpha\varphi(\vec{y})$

$=\lambda(\alpha\varphi)(\vec{x})+\mu(\alpha\varphi)(\vec{y})$ 定义 ☒

问题　$\varphi+\psi$ 和 $\alpha\varphi$ 在对偶基下的矩阵是什么？

设 φ 的矩阵是 A，ψ 的矩阵是 B

$$A_{\varphi+\psi}=\left((\varphi+\psi)(\vec{e}^{(1)}),\cdots(\varphi+\psi)(\vec{e}^{(n)})\right)$$

$$=\left(\varphi(\vec{e}^{(1)})+\psi(\vec{e}^{(1)}),\cdots,\varphi(\vec{e}^{(n)})+\psi(\vec{e}^{(n)})\right)$$

$$=\left(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}\right)$$

设　$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$

$A_{\varphi+\psi}$ 中的第 i 行，第 j 行的元素是 $\vec{A}^{(j)}+\vec{B}^{(j)}$ 中第 i 个元素为 $a_{ij}+b_{ij}$

定义：$A+B$ 为 $m\times n$ 阶矩阵

$C=(c_{ij})_{m\times n}$ 其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

注　设 $C=A+B$

$$C=\left(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\vec{A}_1+\vec{B}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_m+\vec{B}_m\end{pmatrix}$$

$$A_{\alpha\varphi}=\left((\alpha\varphi)(\vec{e}^{(1)}),\cdots(\alpha\varphi)(\vec{e}^{(n)})\right)$$

$$=\left(\alpha\varphi(\vec{e}^{(1)}),\cdots,\alpha\varphi(\vec{e}^{(n)})\right)$$

$$=\left(\alpha\vec{A}^{(1)},\cdots,\alpha\vec{A}^{(n)}\right)$$

$A_{\alpha\varphi}$ 中第 i 行，第 j 列的元素是 $\alpha\vec{A}^{(j)}$ 中第 i 个元素 αa_{ij}

定义：αA 为 $m\times n$ 阶矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$

其中 $c_{ij}=\alpha a_{ij}$

注：设 $C=\alpha A$

则 $C=\left(\alpha\vec{A}^{(1)},\cdots,\alpha\vec{A}^{(n)}\right)=\begin{pmatrix}\alpha\vec{A}_1\\ \vdots\\ \alpha\vec{A}_m\end{pmatrix}$.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$

求 $2A-B$

解 $2A-B=2A+(-1)B=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\\10&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-4\\-2&-5\\-3&-6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\4&3\\7&6\end{pmatrix}$$

推论4.1 设 $\Phi: \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^{m\times n}$ 如定理4.1定义。则 $\forall\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\Phi(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha\Phi(\varphi)+\beta\Phi(\psi)$$

证：$\Phi(\alpha\varphi+\beta\psi)=A_{\alpha\varphi+\beta\psi}$

$=A_{\alpha\varphi}+A_{\beta\psi}$ [矩阵加法定义]

$=\alpha A_\varphi+\beta A_\psi$ [矩阵数乘定义]

$=\alpha\Phi(\varphi)+\beta\Phi(\psi)$. [$\Phi$的定义] □

例：设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

证明 $\mathrm{rank}(A+B)\leq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

证 $A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)})$

$V_c(A+B)=\langle\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}\rangle$

$\because\ \vec{A}^{(j)}+\vec{B}^{(j)}\in V_c(A)+V_c(B)$, $j=1..n$

$V_c(A+B)\subset V_c(A)+V_c(B)$

~~dim(A+B)~~

$\mathrm{rank}(A+B)=\dim V_c(A+B)$

$\leq\dim(V_c(A)+V_c(B))$

$\leq\dim(V_c(A))+\dim V_c(B)$ [维数公式]

$=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$. □

§4.3 矩阵的转置

定义：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

A 的转置（transpose）是 $n\times m$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

记为 A^t。

$\boxed{注}$ 注：设 $A^t=(a'_{ji})_{\substack{j=1,\cdots,n\\ i=1,\cdots,m}}$

则 $a'_{ji}=a_{ij}$

例：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，$A^t=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$

$$(a,b,c,d)^t=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

命题 4.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则 $(A^t)^t=A$，$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^t)$。

证：

$$(A^t)^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn}\end{pmatrix}^t$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn}\end{pmatrix}=A$$

$$\dim V_r(A^t)=\dim V_c(A)\Rightarrow \operatorname{rank}(A^t)=\operatorname{rank}(A)$$ $\boxed{}$

命题 4.3 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\alpha\in\mathbb{R}$

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

$$(\alpha A)^t=\alpha A^t$$

证：设 ~~$\mathcal{A}$~~ $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$

$C=A+B=(c_{ij})_{m\times n}$

$D=\alpha A=(d_{ij})_{m\times n}$

$$(A+B)^t = C^t = (c_{ji})_{n\times m} = (a_{ji}+b_{ji})_{n\times m}$$

$$= (a_{ji})_{n\times m} + (b_{ji})_{n\times m} = (a_{ji}+b_{ji})$$

$$(\alpha A)^t = D^t = (d_{ji})_{n\times m} = (\alpha a_{ji})_{n\times m}$$

$$= \alpha (a_{ji})_{n\times m} = \alpha A^t \quad \boxed{}$$

§4.4 矩阵的乘法.

<u>记号</u> 设 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是 $\vec{e}^{(1)},\dots,\vec{e}^{(n)}$

$\mathbb{R}^s$ ------ $\vec{\delta}^{(1)},\dots,\vec{\delta}^{(s)}$

$\mathbb{R}^m$ ------ $\vec{\varepsilon}^{(1)},\dots,\vec{\varepsilon}^{(m)}$

命题4.4 设 $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$. 则

$$\varphi\circ\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

证:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\psi"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\varphi\circ\psi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})$

$= \varphi(\psi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}))$ [复合定义]

$= \varphi(\alpha\psi(\vec{x})+\beta\psi(\vec{y}))$ [ψ线性性]

$= \alpha\varphi(\psi(\vec{x}))+\beta\varphi(\psi(\vec{y}))$ [φ线性性]

$= \alpha\,\varphi\circ\psi(\vec{x})+\beta\,\varphi\circ\psi(\vec{y})$ [复合定义] $\boxed{}$

问题: 设 ψ 在标准基下的矩阵是 B

φ ------ A

$\varphi\circ\psi$ 在标准基下的矩阵是什么?

设 $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 $\varphi\circ\psi$ 的矩阵

$$C=\left(\varphi\circ\psi(\vec{e}^{(1)}),\cdots\varphi\circ\psi(\vec{e}^{(n)})\right)$$

$$=\left(\varphi(\psi(\vec{e}^{(1)})),\cdots\varphi(\psi(\vec{e}^{(n)}))\right)$$

$$=\left(\varphi(\vec{B}^{(1)}),\cdots,\varphi(\vec{B}^{(n)})\right)$$

设 $B=(b_{kj})_{s\times n}$

~~则 $C=(\varphi$~~

则 $\vec{B}^{(j)}=\begin{pmatrix} b_{1j}\\ \vdots \\ b_{sj}\end{pmatrix}=b_{1j}\vec{\delta_1}+\cdots+b_{sj}\vec{\delta_s}$

$$\varphi(\vec{B}^{(j)})=\varphi(b_{1j}\vec{\delta_1}+\cdots+b_{sj}\vec{\delta_s})$$

$$=b_{1j}\varphi(\vec{\delta_1})+\cdots+b_{sj}\varphi(\vec{\delta_s})$$

$$=b_{1j}\vec{A}^{(1)}+\cdots+b_{sj}\vec{A}^{(s)}$$

于是

$$\vec{C}^{(j)}=b_{1j}\vec{A}^{(1)}+\cdots+b_{sj}\vec{A}^{(s)},\quad j=1,2,\dots n$$

令 $C=(c_{ij})_{m\times n}$, $A=(a_{ik})_{m\times s}$

则 $c_{ij}=b_{1j}a_{i1}+\cdots+b_{sj}a_{is}$

$$=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{s=1}^{k}a_{ik}b_{kj}$$

定义：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

A和B的积是 $m\times n$ 阶矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{is}b_{sj}$. 记 $C=AB$

注：设 ~~[illegible]~~ $\psi\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^s)$

$\varphi\in Hom(\mathbb{R}^s,\mathbb{R}^m)$ B 它们在 A 标准

基下的矩阵是 ~~A~~ 和 B

则 $\psi\circ\varphi$ 在标准基下的矩阵是 AB 即

$\boxed{\cancel{\varphi_A / \psi}}$

由定理4.1 $\varphi=\varphi_A$, $\psi=\varphi_B$

于是 $\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}$

~~注：~~ $\cancel{c_{ij}=(a}$

注：AB 只在 A 的列数等于 B 的行数时有定义. 此时 AB 行数是 A 的行数，列数是 B 的列数

例：$(\alpha_1,\cdots\alpha_s)\in\mathbb{R}^{1\times s}$, $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{s\times 1}$

$$(\alpha_1,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}$$

$$=\alpha_1\beta_1+\cdots+\alpha_s\beta_s$$

注：设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$, $B=(b_{kj})_{s\times n}$

$C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=(a_{i1},\cdots a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}$$

$$=\vec{A}_i\,\vec{B}^{(j)}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} \\ \text{———} \\ \\ \end{pmatrix}_{m\times s}\quad\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix}_{s\times n}\end{array}$$

例：
$$AB=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\vec{B}^{(1)}, & \cdots & \vec{A}_1\vec{B}^{(n)}\\ & \cdots & \\ \vec{A}_m\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_m\vec{B}^{(n)}\end{pmatrix}$$

例：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

求 AB

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&3&3\\4&9&6\end{pmatrix}$$

注 BA 没有定义

注：~~如果 A，B 都是方阵 则 AB 与 BA 也是~~

n 阶方阵

设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

注：AB 一般不等于 BA

$A\neq O_{n\times n}$ $B\neq O_{n\times n}$ 但 AB 可能是 $O_{n\times n}$

注：设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$AB=AC$ 且 $A\neq O_{n\times n}$

$\not\Rightarrow$ $B=C$ [左消去律不成立]

类似（右消去律不成立）

例：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\operatorname{rank}(A)=1$

则 $\exists\ \alpha_1,\cdots\alpha_m$；$\beta_1,\cdots\beta_n\in\mathbb{R}$，使得

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots\beta_n)$$

证：$\because$ $\operatorname{rank}(A)=1$ $\therefore$ $\dim V_c(A)=1$

设 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}$ 是 $V_c(A)$ 的基

则 $\forall j\in\{1,\cdots,n\}$ $\overrightarrow{A}^{(j)}=\beta_j\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}$，$\beta_j\in\mathbb{R}$，$j=1\cdots m$

[A 中第 i 行第 j 列元素是 $\beta_j\alpha_i$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots\beta_n) = (\alpha_i\beta_j)_{m\times n}$$
$$= A \qquad \square$$

§4.5 矩阵乘法的规律

~~一、交换律、结合律~~

设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\cancel{(A+B)+C=A}$

$A+B=B+A$ （加法交换）

$(A+B)+C=A+(B+C)$ （加法结合）

$A+O_{m\times n}=A$ （加法单位）

$A+(-A)=O_{m\times n}$ （加法逆）

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ （数乘结合）

$1A=A$ （数乘单位）

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ （分配）

$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ （分配）

（自己验证）

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times k}$, $C\in\mathbb{R}^{k\times n}$ 12

$$(AB)C=A(BC)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_C"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_B\circ\varphi_C = \varphi_{BC}"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "\varphi_B"] \arrow[dr, "\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_{AB}"] & \\
 & \mathbb{R}^s \arrow[r, "\varphi_A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

由定理3.2 [参考]

$$\varphi_A\circ(\varphi_B\circ\varphi_C) = (\varphi_A\circ\varphi_B)\circ\varphi_C$$

$$\varphi_A\circ(\varphi_B\circ\varphi_C) = \varphi_A\circ\varphi_{BC} = \varphi_{A(BC)}$$

$$(\varphi_A\circ\varphi_B)\circ\varphi_C = \varphi_{AB}\circ\varphi_C = \varphi_{(AB)C}$$

由定理4.1 $A(BC)=(AB)C$

乘法与加法分配律

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B, C\in\mathbb{R}^{s\times n}$

$$A(B+C)=AB+AC$$

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times k}$

$$(B+C)A=BA+CA$$

设 $P=A(B+C)$，$Q=AB+AC$

$A=(a_{ik})_{m\times s}$，$B=(b_{kj})_{k\times n}$，$C=(c_{kj})_{k\times n}$

$P=(p_{ij})_{m\times n}$. $Q=(q_{ij})_{m\times n}$

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}c_{kj}$$

$$=q_{ij}.$$

类似验证：$(B+C)A=BA+CA$

乘法与数乘分配 (3)

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$，$\alpha\in\mathbb{R}$

$$(\alpha A)B=A(\alpha B)=\alpha(AB).$$

自己验证.

命题4.5 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

则 $(AB)^t=B^tA^t$

证：设 $A=(a_{ik})_{\substack{i=1,\cdots,m\\k=1,\cdots,s}}$，$B=(b_{kj})_{\substack{k=1,\cdots,s\\j=1,\cdots,n}}$

$A^t=(a'_{ki})_{s\times m}$ $B^t=(b'_{jk})_{n\times s}$

$C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$，$D=B^tA^t=(d_{ji})$

$$d_{ji}=\sum_{k=1}^{s}b'_{jk}a'_{ki}. \quad \text{(乘法定义)}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}b_{kj}a_{ik} \quad \text{(转置定义)}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$$

令 $C^t=(c'_{ji})_{n\times m}$，$c'_{ji}=c_{ij}$

$$\Rightarrow d_{ji}=c'_{ji}\Rightarrow D=C^t. \ \blacksquare$$

例：利用矩阵乘法化简符号

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$$A\vec{x}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ &\cdots&\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

以 A 为系数的齐次线性方程组

$$A\vec{x}=\vec{0}_m$$

设 $\vec{b}\in\mathbb{R}^m$. 以 $(A\,\vdots\,\vec{b})$ 为增广矩阵的线性方程组

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

以 A 为矩阵的线性映射

$$\varphi(\vec{x})=A\vec{x}$$

验证：V_A 是子空间

设 $\vec{u},\vec{v}\in V_A$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$A(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha A\vec{u}+\beta A\vec{v} \quad (\text{分配律})$$

$$=\alpha\vec{0}_m+\beta\vec{0}_m=\vec{0}_m$$

设 S 是 $A\vec{x}=\vec{b}$ 解的集合

$\vec{v}\in S$

则 $S=\vec{v}+V_A=\{\vec{v}+\vec{z}\mid\vec{z}\in V_A\}$

设 $\vec{u}\in S$ $\quad A(\vec{u}-\vec{v})=A\vec{u}-A\vec{v}$

$$=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}_m$$

$$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}\in V_A \Rightarrow S\subset\vec{v}+V_A$$

$(\vec{u}=\vec{v}+(\vec{u}-\vec{v}))$

设 $\vec{w}\in\vec{v}+V_A$. 则 $\exists\,\vec{z}\in V_A$

$$\vec{w}=\vec{v}+\vec{z}$$

$$A\vec{w}=A(\vec{v}+\vec{z})=A\vec{v}+A\vec{z}=\vec{b}+\vec{0}_m=\vec{b}$$

$$\Rightarrow\vec{w}\in S \Rightarrow \vec{v}+V_A\subset S$$

例 矩阵乘法的行形式和列形式

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

则 $AB=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}=(A\vec{B}^{(1)},\cdots,A\vec{B}^{(n)})$

证: AB 的第 i 行是 $(\vec{A}_i\vec{B}^{(1)},\cdots,\vec{A}_i\vec{B}^{(n)})$

而 $\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ A_mB\end{pmatrix}$ 的第 i 行是 $\vec{A}_iB=(\vec{A}_i\vec{B}^{(1)},\cdots\vec{A}_i\vec{B}^{(n)})$

类似: 列形式成立

命题4.6 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则

(i) $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_m\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\lambda_1\vec{A}_1\\ \vdots\\ \lambda_m\vec{A}_m\end{pmatrix}$

(ii) $A\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\vec{A}^{(1)},\cdots,\lambda_n\vec{A}^{(n)})$

证: (i)

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_m\end{pmatrix}A$ 的第 i 行是

$\underbrace{(0\cdots0\ \lambda_i\ 0\cdots0)}_{m}A=(0\cdots0\ \lambda_i\ 0\cdots0)\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}$

$=\lambda_i\vec{A}_i$, $i=1,\cdots m$

$A\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的第 j 列是

$A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_j\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=(\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_j\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_j\vec{A}^{(j)}$, $j=1,2\cdots n$ $\square$

推论4.2. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则: $(\lambda E_m)A=A(\lambda E_n)=\lambda A$

证: 在命题4.6中取 $\lambda_1=\cdots\lambda_m=\lambda$ 和 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$ 即可

注: 由此可知 $O_{m\times m}A=AO_{n\times n}=O_{m\times n}$

$E_mA=AE_n=A$.

术语：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 称为 n 阶 ~~算行方~~ 对角阵

记为 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

$O_{n\times n}$ 记为 O_n.

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$

求 DA 和 AD

证：$DA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$, $AD = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \\ 7 & 16 & 27 \end{pmatrix}$

~~例. Hadamard's product~~

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$. $B = (b_{ij})_{m\times n}$

$$A \odot B = (a_{ij} b_{ij})_{m\times n}.$$

也 ~~称为 Children's product~~

§4.6 关于秩的(不)等式

回忆 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\mathrm{rank}(A) \le \min(m, n)$

$\mathrm{rank}(A^t) = \mathrm{rank}(A)$

$\mathrm{rank}(A \mid B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

$\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

定理4.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

则 $\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$

证：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_B} & \mathbb{R}^s \\ & \searrow^{\varphi_{AB}} & \downarrow \varphi_A \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$\mathrm{im}(\varphi_B) \subset \mathbb{R}^s$

$$\underbrace{\varphi_A(\mathrm{im}(\varphi_B))}_{=\,\mathrm{im}(\varphi_{AB})} \subset \underbrace{\varphi_A(\mathbb{R}^s)}_{=\,\mathrm{im}(\varphi_A)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(\mathrm{im}(\varphi_{AB}))}_{=\,\mathrm{rank}(AB)} \le \underbrace{\dim(\mathrm{im}(\varphi_A))}_{=\,\mathrm{rank}(A)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A)$$

设 $\vec{x}\in\ker(\varphi_B)$ 则 $\varphi_B(\vec{x})=\vec{0}_s$

$$\varphi_{AB}(\vec{x})=\varphi_A\circ\varphi_B(\vec{x})=\varphi_A(\vec{0}_s)=\vec{0}_m$$

$$\Rightarrow \vec{x}\in\ker(\varphi_{AB})$$

$$\ker(\varphi_B)\subseteq\ker(\varphi_{AB})$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(\varphi_B))\leq\dim(\ker(\varphi_{AB}))$$

$$\Rightarrow n-\dim(\mathrm{im}(\varphi_B))\leq n-\dim(\mathrm{im}(\varphi_{AB}))$$

对偶定理

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\varphi_{AB}))\leq\dim(\mathrm{im}(\varphi_B))$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(B).\ \blacksquare$$

~~推论4.3~~

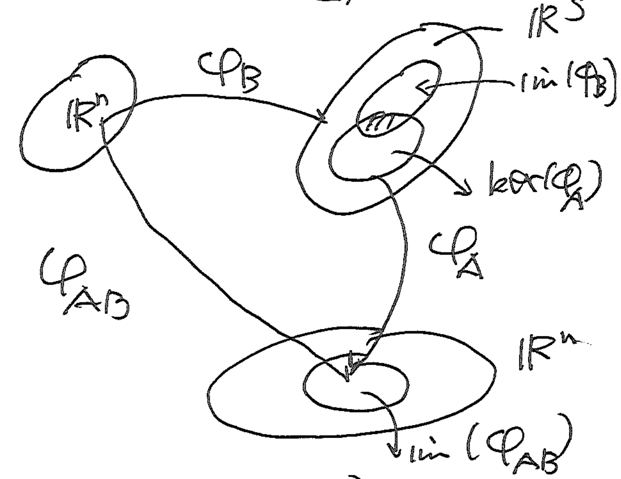
定理 4.2 (Sylvester's 不等式)

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

则 $\mathrm{rank}(AB)\geq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s$.

证:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[dr, "\varphi_{AB}"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\varphi_A"] \\
 & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$



设: $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_d$ 是 $\ker(\varphi_A)\cap\mathrm{im}(\varphi_B)$ 的一组基. 将其扩充为 $\mathrm{im}(\varphi_B)$ 的基

$$\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_d,\ \vec{u}_{d+1},\dots,\vec{u}_k$$

断言: $\varphi_A(\vec{u}_{d+1}),\dots,\varphi_A(\vec{u}_k)$ ~~是 $\mathrm{im}(\varphi_{AB})$ 的一组基~~ 线性无关.

断言的证明: 设 $\alpha_{d+1},\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_{d+1}\varphi_A(\vec{u}_{d+1})+\dots+\alpha_k\varphi_A(\vec{u}_k)=\vec{0}_n$$

$$\Rightarrow \varphi_A(\alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\dots+\alpha_k\vec{u}_k)=\vec{0}_n$$

$$\Rightarrow \alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\dots+\alpha_k\vec{u}_k\in\ker(\varphi_A)$$

$$\Rightarrow \alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1}+\dots+\alpha_k\vec{u}_k\in\ker(\varphi_A)\cap\mathrm{im}(\varphi_B)$$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \cdots \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_{d+1}\vec{u}_{d+1} + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_d \vec{u}_d$$

$\Rightarrow \alpha_{d+1} = \cdots = \alpha_k = 0$ [$\because \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_d, \vec{u}_{d+1}, \cdots \vec{u}_k$ 线性无关]

$\Rightarrow \varphi(\vec{u}_{d+1}), \cdots, \varphi(\vec{u}_k)$ 线性无关

断言可证.

$$\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathrm{im}(\varphi_{AB}))$$

$\geq k-d$ (断言)

$= \mathrm{rank}(B) - d$ [$k = \dim(\varphi_B) = \mathrm{rank}(B)$]

$\geq \mathrm{rank}(B) - \dim \ker(\varphi_A)$

[$\ker(\varphi_A) \cap \mathrm{im}(\varphi_B) \subset \ker(\varphi_A)$]

$= \mathrm{rank}(B) - (s - \mathrm{rank}(A))$ [维数定理]

$= \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s$. $\boxed{}$

推论 4.3

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$

则 (i) 若 $\mathrm{rank}(P) = m$. 则 $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$

(ii) 若 $\mathrm{rank}(Q) = n$. 则 $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$

证: (i) $\mathrm{rank}(PA) \leq \mathrm{rank}(A)$. [定理4.1]

$\mathrm{rank}(PA) \geq \mathrm{rank}(P) + \mathrm{rank}(A) - m = \mathrm{rank}(A)$ [定理4.2]

$\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$.

(ii) 类似.