回忆：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-s\le \operatorname{rank}(AB)\le\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$$

推论4.3 设 $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

(i) 如果 $\operatorname{rank}(P)=m$ 则

$$\operatorname{rank}(PA)=\operatorname{rank}(A)$$

(ii) 如果 $\operatorname{rank}(Q)=n$ 则

$$\operatorname{rank}(PQ)=\operatorname{rank}(A)$$

证：(i) 由定理4.1和4.2

$$\operatorname{rank}(PA)\le\min(\operatorname{rank}(P),\operatorname{rank}(A))$$

$$\operatorname{rank}(P)+\operatorname{rank}(A)-m\le\operatorname{rank}(PA)$$

$$\underbrace{m+\operatorname{rank}(A)-m}_{=\operatorname{rank}(A)}\le\operatorname{rank}(PA)\le\operatorname{rank}(A)$$

(ii) 类似

注：推论4.1 可简述为 矩阵A乘以满秩方阵秩不变.

§5 方阵

记号：令 $\mathbb{R}^{n\times n}=M_n(\mathbb{R})$，所有n阶方阵的集合.

$\forall A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

加法封闭且满足，加法交换和结合律

记 $O_{n\times n}$ 为 O_n 或 O 则 $A+O=A$ 和 $A+(-A)=O$

数乘封闭且满足 结合与 $1A=A$

乘法封闭 且满足 结合律.

有时记 E_n 为 E 则 $AE=EA=A$
(推论4.2)

分配律 加，数乘. 加，乘. ~~数乘~~

称 $M_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的n阶矩阵代数

注：设 $k \in \mathbb{Z}^+$，$A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k}$$

定义：$A^0 = E$

可直接验证：$\forall k, l \in \mathbb{N}$

$$A^{k+l} = A^k A^l$$

注：几个容易出错的地方

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$AB = BA$ 一般不成立

$A \neq O$，$B \neq O$ $\not\Rightarrow$ $AB = O$

从而 左(右)消去律不成立

$(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$ (一般来说)

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，

展开 $(A+B)^2$，$(A+B)(A-B)$

解 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

$= (A+B)A + (A+B)B$ [分配]

$= A^2 + BA + AB + B^2$ [分配]

$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$

$= A^2 - AB + BA - B^2$

注：当 $AB = BA$ 时 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

例：设 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$，求 D^m $(m > 0)$

解 $D^0 = E$，$D^1 = D$.

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

归纳：$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

当 $m=0,1,2$ 时公式成立

设 $m-1$ 时公式成立.

$$D^m = D^{m-1}D = \begin{pmatrix}\lambda_1^{m-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_1^{m} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{m}\end{pmatrix}.$$

由归纳法可知. 公式对 $\forall m\in N$ 成立.

例: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}$, 计算 A^m

$A^0 = E$, $A^1 = A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2\end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^3 & c(a^2+ab+b^2) \\ 0 & b^3\end{pmatrix}$$

猜: $A^m = \begin{pmatrix} a^m & c\dfrac{a^m-b^m}{a-b} \\ 0 & b^m\end{pmatrix}$ ③

其中 $\dfrac{a^m-b^m}{a-b}$ 代表 $a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}$

$m=0,1,2,3$ ✓ 当 m 时

设 $m-1$ 时上述公式成立.

$$A^m = A^{m-1}A = \begin{pmatrix} a^{m-1} & c\dfrac{a^{m-1}-b^{m-1}}{a-b} \\ 0 & b^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^m & ca^{m-1}+\dfrac{cb(a^{m-1}-b^{m-1})}{a-b} \\ 0 & b^m\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^m & c\dfrac{a^m-b^m}{a-b} \\ 0 & b^m\end{pmatrix}$$ ∎

例：设 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$

$E_{ij}^{(n)}$ 为 n 阶方阵，在 i 行 j 列处为 1，在其它处为 0 的矩阵，当 n 明确时，$E_{ij}^{(n)}$ 也记为 E_{ij}

设 $E_{ij}, A\in M_n(\mathbb{R})$.

证明：(i) $E_{ij}A = \begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots \\ \vec{0}\\ \vec{A_j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\,-\,-\; i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

其中 $\vec{0}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n})$

(ii) $AE_{ij}=(\vec{0},\cdots\vec{0}\ \underset{j}{\vec{A}^{(i)}}\ \vec{0},\cdots\vec{0})$

其中 $j\in\{1,\cdots,n\}$

④

证：(i)

$E_{ij}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\\ \vec{e_j}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\,-\; i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\vec{e_j}=(0,\cdots 0,\underset{j}{1},0\cdots 0)$

$E_{ij}A=\begin{pmatrix}\vec{0}A\\ \vdots\\ \vec{0}A\\ \vec{e_j}A\\ 0A\\ \vdots\\ 0A\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\,-\; i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\\ \vec{A_j}\\ \vec{0}\\ \vdots\\ \vec{0}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\,-\; i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

(2) $E_{ij}=(\vec{0},\cdots\vec{0},\underset{j}{\vec{e}^{(i)}},\vec{0}\cdots\vec{0})$，$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$AE_{ij}=(A\vec{0},\cdots A\vec{0}\ \underset{j}{A\vec{e}^{(i)}}\ A\vec{0},\cdots A\vec{0})$

$=(\vec{0},\cdots,\vec{0},\underset{j}{\vec{A}^{(i)}},\vec{0},\cdots\vec{0})$

§5.2 中心元

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. ~~如果~~ $\forall B\in M_n(\mathbb{R})$

$$AB=BA$$

则称 A 是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的中心元

例：$\forall \lambda\in\mathbb{R}$ λE 是中心元

$\forall A\in M_n(\mathbb{R})$ $\quad (\lambda E)A=\lambda A$

$A(\lambda E)=\lambda AE=\lambda A$

$$\Rightarrow (\lambda E)A=A(\lambda E).$$

定理 5.1 $M_n(\mathbb{R})$ 中的中心元 ~~都是数乘矩阵~~ 即 λE, $\lambda\in\mathbb{R}$.

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是中心元

设 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$ $\quad i\neq j$

$$E_{ij}A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ -i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$AE_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ -i \\ \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array}$$

$\because E_{ij}A=AE_{ij}$ $\quad\therefore$ $a_{ij}=0.$ $i\neq j$

☐

且 $a_{ii}=a_{jj}.$

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 求

$(A+\lambda E)^k$ $\qquad\because A(\lambda E)=\lambda EA$

$$=A^k+\binom{k}{1}A^{k-1}\lambda E+\cdots+\binom{k}{k-1}A\lambda^{k-1}E+\binom{k}{k-1}\lambda^k E$$

$$=A^k+\binom{k}{1}\lambda A^{k-1}+\cdots+\binom{k}{k-1}\lambda^{k-1}A+\binom{k}{k-1}\lambda^k E.$$

§5.3 可逆元

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. ~~如果存在~~

$B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=BA=E$

则称 A 是可逆元（可逆矩阵）

~~图注~~：

例：设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_1\cdots\lambda_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

令 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$

则 $AB=BA=E \Rightarrow A$ 可逆

命题 5.1 设 $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$

$AB=BA=E$

若 $CA=E$ 或 $AC=E$，则 $B=C$

证：设 $CA=E$，则

$(CA)B=EB$

$C(AB)=B \Rightarrow CE=B$

$\Rightarrow C=B$.

另一种情况类似.

注：由上述命题可知，当 $AB=BA=E$ 时，B 是唯一的

称为 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}.

定理 5.2 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$.

则 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 满秩（即 $\operatorname{rank}(A)=n$）

证："$\Rightarrow$" 设 $B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得

$AB=E$

$n=\operatorname{rank}(AB)\leqslant\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$

$\leqslant\operatorname{rank}(A)\leqslant n$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=n$.

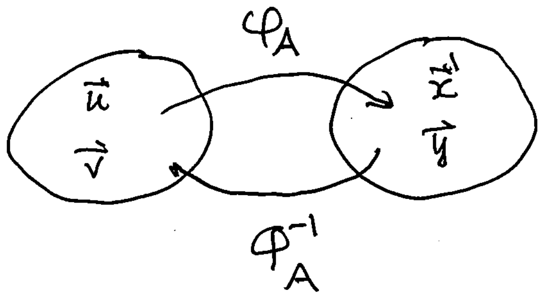
"$\Leftarrow$" 考虑 $\varphi_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

$\dim(\operatorname{Im}(\varphi_A))=\operatorname{rank}(A)=n$

$\Rightarrow \varphi_A$ 是满射

由推论 3.1，φ_A 是双射

下面验证：φ_A^{-1} 也是线性映射



设 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

∵ φ_A 满 ∴ $\exists\,\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi_A(\vec{u})=\vec{x}$, $\varphi_A(\vec{v})=\vec{y}$. ∵ φ_A 线性 ∴ $\varphi_A(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$

于是 $\varphi_A^{-1}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ [φ_A^{-1} 的定义]

$=\alpha\varphi_A^{-1}(\vec{x})+\beta\varphi_A^{-1}(\vec{y})$ [φ_A^{-1} 的定义]

~~设~~ 由此可知 φ_A^{-1} 线性. 设其矩阵为B

则 $\varphi_A^{-1}=\varphi_B$.

定理4.1

$\varphi_{AB}=\varphi_A\circ\varphi_B=\varphi_A\circ\varphi_A^{-1}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow AB=E$

$\varphi_{BA}=\varphi_B\circ\varphi_A=\varphi_A^{-1}\circ\varphi_A=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow BA=E$

∎

A 可逆

推论5.1 设 $A,B,C\in M_n(\mathbb{R})$ 如果 $AB=E$ 或 $CA=E$. 则 $B=A^{-1}$ 或 $C=A^{-1}$

证：设 $CA=E$.

$n=\mathrm{rank}(CA)\leq\mathrm{rank}(A)\leq n$

p16 定理4.1　　讲义2-3 page 2

于是 $\mathrm{rank}(A)=n$. 由定理5.2

A ~~满秩~~ 可逆.

$CA=E\Rightarrow CAA^{-1}=EA^{-1}\Rightarrow C=A^{-1}$ ∎

推论5.2 设 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$. 如果 A,B 可逆 则 AB 也可逆 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

证：$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$

$=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$\Rightarrow B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ [推论5.1] ∎

推论5.3 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则 A^t 可逆 且 $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

证：$A^t(A^{-1})^t=(A^{-1}A)^t$ [命题4.5]

$=E^t=E$

由推论5.1. $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$. ∎

§5.3 若干特殊的方阵

定义：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$. 如果

$A^t=A$ 则称 A 是对称的

$A^t=-A$ ······斜对称的

$\exists k\in\mathbb{Z}^+$，使得 $A^k=O$. 则称 A 是幂零的

$A^2=A$ 则称 A 是幂等的

例：$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称的 $\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$

$(i,j\in\{1,\dots,n\})$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ 是对称的

A 是斜对称的 $\Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}$,

$(i,j\in\{1,\dots,n\})$

特别地 $2a_{ii}=0$

$\Rightarrow a_{ii}=0$, $(\because 2\neq 0)$

$\begin{pmatrix}0&-3\\3&0\end{pmatrix}$ 斜对称.

$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

一般而言

$J=\begin{pmatrix}0&1&&O\\&0&1&\\&&\ddots&1\\O&&&0\end{pmatrix}_n$ $J^n=O$

$\begin{pmatrix}E_k&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}&O\\O&O\end{pmatrix}$ 是幂等的

直接验证

例：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 幂零

证明：$E-A$ 可逆，~~其中 $\lambda\in\mathbb{R}$ 的~~

证：设 $A^k=O$

$E=E-A^k=(E-A)(E+A+\dots+A^{k-1})$

于是 $(E-A)^{-1}=E+A+\dots+A^{k-1}$ ∎

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，均对称

如果 $AB = BA$，则 AB 必对称

证：$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$ □

§5.4 一个例子

~~科斯特里金~~ p72. 例3

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 计算 A^m $(m \geq 0)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^0 = E$，$A^1 = A$.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

猜：$A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$

(不难看出)

其中 $f_{m+1} = f_{m-1} + f_m$，$f_0 = 0, f_1 = 1$

令 $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

"不难"计算

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix}$$

验证：

$$\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

“不难”计算

$$A = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B$$

验证：

$$\begin{pmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{1}{5}\lambda_2\\ \sqrt{5}\lambda_1^2 & -\frac{\lambda_2^2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1+\lambda_2)\\ \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2-\lambda_2^2) & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

于是

$$A^2 = AA$$

$$= B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}BB^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B$$

$$= B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}B$$

归纳：$A^m = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}B$

$m=2$ ✓. 设 $m-1$ 时公式成立

$$A^m = B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{m-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{m-1}\end{pmatrix}\underbrace{BB^{-1}}_{E}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B$$

$$= B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}B$$

公式成立

Fibonacci 序列

$f_0=0,\ f_1=1,\ f_m = f_{m-1}+f_{m-2},\ m=2,3\cdots$

$f_2=1,\ f_3=2,\ f_4=3$

$f_0=0,\ f_1=1,\ f_2=1,\ \cdots\ f_{20}=6765,\ \cdots\ f_{50}=12586269025$

f_m 的通项公式

$$\begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt5 & -\frac15 \\ \sqrt5\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac15\\ -\sqrt5\lambda_1 & \sqrt5\end{pmatrix}$$

$$\cancel{f_m} \qquad = \begin{pmatrix}\sqrt5\lambda_1^m & -\frac15\lambda_2^m \\ \sqrt5\lambda_1^{m+1} & -\frac15\lambda_2^{m+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac15\\ -\sqrt5\lambda_1 & \sqrt5\end{pmatrix}$$

$$f_m = \frac{\sqrt5}{5}\left(\lambda_1^m - \lambda_2^m\right)$$

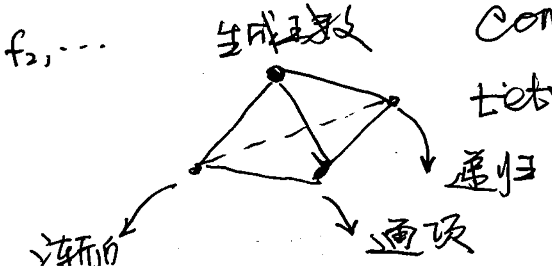
$$= \frac{\sqrt5}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^m\right)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_m}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^m} = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^m$$

(f_m 的渐近行为)

$f_0, f_1, f_2, \cdots$



concrete

tetrahedron

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$$

Concrete = continuous + discrete

§6 矩阵的等价

定义: 设 ~~A,B~~ $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

如果存在 $P \in M_m(\mathbb{R})$, $Q \in M_n(\mathbb{R})$

且 P, Q 可逆 使得

$$A = PBQ$$

则称: A 和 $\cancel{Q}$ B 初等等价.

记为 $A \sim_e B$

验证: $\sim_e$ 是等价关系

1. $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = E_m A E_n$$

$$\Longrightarrow A \sim_e A$$

自反性成立

2. 对称：设 $A \sim_e B$，则存在 $P \in M_m(\mathbb{R})$，$Q \in M_n(\mathbb{R})$ 都可逆，使得

$$A = PBQ$$

则 $P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}(PBQ)Q^{-1}$

$$= (P^{-1}P)B(QQ^{-1}) = B$$

$\Rightarrow \quad B \sim_e A$

3. 传递. 设 $A \sim_e B$，$B \sim_e C$

则 $\exists$ $P, S \in M_m(\mathbb{R})$，$Q, T \in M_n(\mathbb{R})$

使得 $A = PBQ$，$B = SCT$

$$\Rightarrow A = P(SCT)Q = (PS)C(TQ)$$

由推论5.2 PS，TQ 都可逆

于是 $A \sim_e C$

由此可知 ~~A~~ “$\sim_e$” 是等价关系

命题6.1. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

如果 $A \sim_e B$，则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

证：$\exists P \in M_m(\mathbb{R})$，$Q \in M_n(\mathbb{R})$ 都可逆

使得 $A = PBQ$

则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(PBQ) = \operatorname{rank}(B)$

（推论4.3，定理5.2）

定义：把 $E \in M_n(\mathbb{R})$ 中第 i 行和第 j 行对调所得到的矩阵记为 $F_{i,j}^{(n)}$

$(i, j \in \{1, 2, \cdots n\})$

验证：$$F_{i,j}^{(m)} A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_j \\ \vdots \\ \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$A F_{i,j}^{(n)} = \begin{array}{c} (\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(j)}, \cdots \vec{A}^{(i)}, \cdots \vec{A}^{(n)}) \\ \qquad\qquad\quad i \qquad\quad\ \ j \end{array}$$

其中 A 是 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 中任意矩阵

$$F_{i,j}^{(m)} = E_m - E_{i,i}^{(m)} - E_{j,j}^{(m)} + E_{i,j}^{(m)} + E_{j,i}^{(m)}$$

$$F_{i,j}^{(m)}A = E_m A - E_{i,i}^{(m)}A - E_{j,j}^{(m)}A + E_{i,j}^{(m)}A + E_{j,i}^{(m)}A$$

$$= A - \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{A_i} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \\ \end{array} - \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ \vec{A_j} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \end{array} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{A_j} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdots i \\ \\ \\ \\ \end{array} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{A_i} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vdots \\ \vec{A_j} \\ \vdots \\ \vec{A_i} \\ \vec{A_n} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \\ \\ \end{array}$$

类似地 $$A F_{ij}^{(n)} = \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \\ (\vec{A}^{(1)}, & \cdots & \vec{A}^{(j)}, & \cdots & \vec{A}^{(i)}, & \cdots & \vec{A}^{(m)}) \end{array}$$

由此可知 $F_{ij}^{(n)} F_{ij}^{(n)} = E_n \Rightarrow F_{ij}^{(n)}$可逆

定义：设 $i, j \in \{1, 2, \cdots n\}$，$i \neq j, \lambda \in \mathbb{R}$

$F_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 中第j行通乘λ加到第i行所得到的矩阵

验证：$F_{ij}^{m}(\lambda)A$是把A中第j行通乘λ后加到第i行所得矩阵

$$F_{ij}^{(n)}(\lambda) = E_n + \lambda E_{ij}^{(n)}$$

$$F_{ij}^{(m)}(\lambda)A = [E_m + \lambda E_{ij}^{(m)}]A$$

$$= A + \lambda E_{ij}^{(m)} A$$

$$= A + \lambda \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{A_j} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vec{A_{i-1}} \\ \vec{A_i} + \lambda\vec{A_j} \\ \vec{A_{i+1}} \\ \vdots \\ \vec{A_m} \end{pmatrix}$$

类似地可验证

$$A F_{ij}^{(n)}(\lambda) = (\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(j-1)}, \lambda\vec{A}^{(i)} + \vec{A}^{(j)}, \vec{A}^{(j+1)}, \cdots \vec{A}^{(m)})$$

特别地 $F_{ij}^{(n)}(\lambda) F_{ij}^{(n)}(-\lambda) = E$

$\Rightarrow F_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 可逆

定义：设 $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

$$F_i^{(n)}(\lambda)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\i\\\\\\\end{matrix}\\ \quad i\end{array}\quad 且\ \lambda\neq0$$

验证：$F_i^{(m)}(\lambda)A=\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix}\vec{A_1}\\ \vdots\\ \vec{A_{i-1}}\\ \lambda\vec{A_i}\\ \vec{A_{i+1}}\\ \vdots\\ \vec{A_m}\end{pmatrix}\end{array}$, $AF_i^{(n)}(\lambda)=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(i-1)},\lambda\vec{A}^{(i)},\vec{A}^{(i+1)},\dots,\vec{A}^{(n)})$

$$F_i^{(n)}(\lambda)=E_m+(\lambda-1)E_{ii}^{(m)}$$

$$AF_i^{(n)}(\lambda)=AE_m+(\lambda-1)AE_{ii}^{n}$$

$$=A+(\vec{0},\dots,\vec{0},\underset{i}{(\lambda-1)\vec{A}^{(i)}},\vec{0},\dots,\vec{0})$$

$$=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(i-1)},\lambda\overset{i}{\vec{A}^{(i)}},\vec{A}^{(i+1)},\dots,\vec{A}^{(n)})$$

特别地 $F_i^{(n)}(\lambda)F_i^{(n)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=E_n$

$\Rightarrow F_i^{(n)}(\lambda)$ 可逆

定义：$F_{i,j}^{(n)}$, $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$;

$F_{i,j}^{(n)}(\lambda)$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $i\neq j$

$F_i^{(n)}(\lambda)$ $i\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda\neq0$

分别称为n阶 I, II, III 类初等矩阵

注：初等矩阵都可逆，且它们的逆也是同类初等矩阵

定理6.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$

则存在 $P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$

使得 (i) P, Q 都是初等矩阵之积

(从而 P, Q 可逆)

(ii) $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$

证: 由第一章引理2.2 存在若干个 m阶 一、三类初等方阵 $P_1,\dots,P_s$ 使得

$$P_s\cdots P_1A=\left(\begin{array}{ccccccc} 0\cdots 0 & \square & * & \cdots & *** & \cdots & *** \cdots * \\ 0 & & \cdots & 0 & 0\square * & \cdots & ** \cdots * \\ & & & \ddots & & & 0\square * \cdots * \\ 0 & & \cdots & & O & & \end{array}\right)_{m\times n}\Bigg\}r$$

其中 $\square\neq 0$

则存在若干个 n阶一类初等方阵 $Q_1\cdots Q_t$

$$使得\ P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=\left(\begin{array}{cccc} \square & * & \cdots & ** \cdots * \\ 0 & \square & * & ** \cdots * \\ & & \ddots & \\ O & & \square * & \cdots * \end{array}\right)\Bigg\}r$$

则存在若干个三类 n阶初等方阵 $Q_{t+1}\cdots Q_u$ 使得

$$P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_tQ_{t+1}\cdots Q_u=\begin{array}{c} r\{ \end{array}\begin{pmatrix} \square & & O & O \\ O & \ddots & \square & \\ & O & & \end{pmatrix}$$

则存在若干个 m阶 二类初等方阵 $P_{s+1},\dots,P_v$

使得

$$\underbrace{P_v\cdots P_{s+1}P_s\cdots P_1}_{P}A(\underbrace{Q_1\cdots Q_tQ_{t+1}\cdots Q_u}_{Q})=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \square$$

推论6-1

$$\mathbb{R}^{m\times n}/\sim_e=\left\{\overline{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}} \;\middle|\; r=0,1,\dots,\min(m,n)\right\}$$

证：由定理6.1直接可得

其中 $\overline{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \middle| A \underset{e}{\sim} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \right\}$

例：设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ ~~满秩~~ 可逆

证明 A 是若干个初等矩阵之积，

证：由定理5.2 $\mathrm{rank}(A) = n$

由定理6.1 $\exists P, Q \in M_n(\mathbb{R})$

都是若干初等矩阵之积，使得

$$PAQ = E_n$$

~~$A = P^{-1}Q^{-1}$~~

设 $P = P_1 \cdots P_s$，$Q = Q_1 \cdots Q_t$

~~则~~ 其中 $P_1, \cdots P_s$，$Q_1, \cdots, Q_t$

都是初等矩阵，~~则~~它们的逆也是初等矩阵

而 $P^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1}$，$Q^{-1} = Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$

（见推论5.2）

而 $A = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ 得