§7 矩阵求逆

问题：给定 $A\in M_n(\mathbb{R})$

判断A是否可逆？如果A可逆求 A^{-1}

引理7.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

(i) $A=\begin{pmatrix}A'\\A''\end{pmatrix}$，则 $AB=\begin{pmatrix}A'B\\A''B\end{pmatrix}$

(ii) $B=(B',B'')$ 则 $AB=(AB',AB'')$

证：(i) 设 $A'=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\\vdots\\\vec{A}_k\end{pmatrix}$，$A''=\begin{pmatrix}\vec{A}_{k+1}\\\vdots\\\vec{A}_m\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\\vdots\\\vec{A}_kB\\\vec{A}_{k+1}B\\\vdots\\\vec{A}_mB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A'B\\A''B\end{pmatrix}$$

(ii) 设 $B'=(\vec{B}^{(1)},\cdots,\vec{B}^{(k)})$，$B''=(\vec{B}^{(k+1)},\cdots,\vec{B}^{(n)})$

$$AB=(A\vec{B}^{(1)},\cdots,A\vec{B}^{(k)},A\vec{B}^{(k+1)},\cdots A\vec{B}^{(n)})$$
$$=(AB',AB'')$$

注：关于矩阵操作的行形式和列形式

见讲义2-4 page 15

给定 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 求 A^{-1}

(1) 设 ~~A~~ $B=(A\mid E)$

(2) 利用行变换把B中的子矩阵

A化为对角形

(如果在变换过程中发现 $\mathrm{rank}(A)<n$

则A不可逆)

设 $P_1,\cdots P_k$ 是初等矩阵使得

$$P_k\cdots P_1A=E.$$

则 $A^{-1}=(P_k\cdots P_1)$

$$P_k\cdots P_1(A\mid E)$$

即 $P_k\cdots P_1B=P_k\cdots P_1(A\mid E)$

$$=(P_k\cdots P_1A\mid P_k\cdots P_1)$$
$$=(E\mid\underbrace{P_k\cdots P_1}_{A^{-1}})$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$B=\left(\underbrace{\begin{matrix}0&2&0\\1&1&-1\\2&1&-1\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{E}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{12}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\2&1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{31}(-2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\0&-1&1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{13}(1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&2&0&1&0&0\\0&-1&1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{2}(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{32}(1)}\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{E}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}0&-1&1\\\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-2&1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-2&1\end{pmatrix}=F_{32}(1)F_{2}(\tfrac{1}{2})F_{13}(1)F_{31}(-2)F_{12}$$

验证 AA^{-1}

$$=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例：$A_n=\begin{pmatrix}-1&1&\cdots&1\\1&-1&\cdots&1\\\vdots&&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&-1\end{pmatrix}$ 求 A_n^{-1}

当 $n=4$ 时 见 ~~[illegible]~~斯特罗金 P77.

方法2 利用矩阵幂次之间的关系求逆

设 k 是最小正整数使得

$E=A^0, A^1, \dots, A^k$ 线性相关

(把 $M_n(\mathbb{R})$ 看成 $\mathbb{R}^{n^2}$).

则存在 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 不全为零使得

$$\alpha_0 E + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k = O$$

且 $\alpha_k \neq 0$.

命题 ~~推论~~ 7.1　A 可逆 $\Longleftrightarrow \alpha_0 \neq 0$

证: "$\Leftarrow$" 设 $\alpha_0 \neq 0$ 则

$$\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)A + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_0}\right)A^{k-1} + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)A^k = E$$

$$\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}E + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_0}\right)A^{k-2} + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)A^{k-1}\right]A = E$$

由推论5.1　$A^{-1} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)E + \cdots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_0}\right)A^{k-2} + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)A^{k-1}$

"$\Rightarrow$" 假设 $\alpha_0 = 0$. 则

$$\alpha_1 A + \cdots + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \alpha_k A^k = O$$

$$(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_{k-1}A^{k-2} + \alpha_k A^{k-1})A = O$$

$$(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_{k-1}A^{k-2} + \alpha_k A^{k-1}) = O \quad [\because A \text{可逆}]$$

③

又因为 $\alpha_k \neq 0$, 所以

$E, A, \cdots, A^{k-2}, A^{k-1}$ 线性相关

由此可知: k 不极小 $\rightarrow\leftarrow$ ▯

重新回到上述例子中:

$A_n^0 = E,\quad A_n = A_n,$

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 1 \\ & & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & n & \ddots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2n-4)-(n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4)-(n-4) & & n-4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-4 & n-4 & & (2n-4)-(n-4) \end{pmatrix}$$

$=(2n-4)E_n+(n-4)A_n$

$$(2n-4)E_n+(n-4)A_n-A_n^2=O$$

当 $n\neq 2$ 时 A_n 可逆 且

$$E_n=\frac{1}{(2n-4)}\left[A_n^2-(n-4)A_n\right]$$

$$=\frac{1}{2n-4}\left(A_n-(n-4)E_n\right)A_n$$

$$\Rightarrow\quad A_n^{-1}=\frac{1}{2n-4}\left(A_n-(n-4)E_n\right)$$

当 $n=2$ 时 不可逆 $A_2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$$\operatorname{rank}(A_2)=1<2.$$

注：下学期将证明：$\forall A\in M_n(\mathbb{R})$

$$E,\ A,\ \dots,\ A^n$$

必然线性相关.

§8 矩阵分块. (p83. 习题17)

引理8.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$,

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix},\quad B=(B_1,\dots,B_q)$$

则：(i) $AB=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_pB\end{pmatrix}=(AB_1,\dots,AB_q)$

(ii) $AB=(A_kB_l)$ $\quad k=1,2,\dots,p;\ l=1,2,\dots,q$

证：(i) $p=2$ 时 结论由引理1可知

设 $p>1$. (i) 对 $p-1$ 成立

$$AB=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_{p-1}\\ A_p\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_{p-1}\end{pmatrix}B\\ A_pB\end{pmatrix}\quad [引理1]$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_{p-1}B\\ A_pB\end{pmatrix}\quad [归纳假设].$$

类似 $A(B_1,\cdots,B_q)=(AB_1,\cdots AB_q)$

(ii) $AB=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_pB\end{pmatrix}$ [结论ii]

$$=\begin{pmatrix}A_1(B_1,\cdots,B_q)\\ \vdots\\ A_p(B_1,\cdots,B_q)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1, & \cdots, & A_1B_q\\ & \cdots & \\ A_pB_1, & \cdots & A_pB_q\end{pmatrix}$$ ▨

引理8.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

令 $A=(A_1,A_2)$, 其中 $A_1\in\mathbb{R}^{m\times s_1}$, $A_2\in\mathbb{R}^{m\times s_2}$

$B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$, 其中 $B_1\in\mathbb{R}^{s_1\times m}$, $B_2\in\mathbb{R}^{s_2\times m}$

则 $AB=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}=A_1B_1+A_2B_2$

证: 设 $A=(a_{ik})_{m\times s}$, $B=(b_{kj})_{s\times n}$ ⑤

$$C=A_1B_1+A_2B_2=(c_{ij})_{m\times n}$$

$$\vec{c}^{(j)}=\overrightarrow{(A_1B_1)}^{(j)}+\overrightarrow{(A_2B_2)}^{(j)}$$

$$=A_1\vec{B_1}^{(j)}+A_2\vec{B_2}^{(j)}$$

$$c_{ij}=\overrightarrow{(A_1)_i}\vec{B_1}^{(j)}+\overrightarrow{(A_2)_i}\vec{B_2}^{(j)}$$

$$=\sum_{k=1}^{s_1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{l=s_1+1}^{s}a_{il}b_{lj}\quad(s_1+s_2=l)$$

$$=\sum_{p=1}^{s}a_{ip}b_{pj}$$ ▨

$\Rightarrow C=AB.$

引理8.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

设 $A=(A_1,\cdots,A_p)$, 其中 $A_l\in\mathbb{R}^{m\times s_l}$

$B=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_p\end{pmatrix}$, 其中 $B_l\in\mathbb{R}^{s_l\times n}$, $l=1,\cdots p$

则 $AB=(A_1,\cdots,A_p)\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_p\end{pmatrix}=A_1B_1+\cdots+A_pB_p$

证: $p=2$ 见引理 8.2

设 $p>2$ 且结论对 $p-1$ 成立.

$$AB=(A_1,\cdots,A_{p-1}\mid A_p)\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_{p-1}\\ \hline B_p\end{pmatrix}$$

$$=(A_1,\cdots,A_{p-1})\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_{p-1}\end{pmatrix}+A_pB_p \quad [\text{引理8.2}]$$

$$=A_1B_1+\cdots+A_{p-1}B_{p-1}+A_pB_p \quad [\text{归纳假设}]$$

∎

定理 8.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

$$A=(A_{ik})_{\substack{i=1\cdots p\\ k=1\cdots l}},\quad B=(B_{kj})_{\substack{k=1,\cdots,l\\ j=1,\cdots,q}}$$

其中 $A_{ik}\in\mathbb{R}^{m_i\times s_k}$, $B_{kj}\in\mathbb{R}^{s_k\times n_j}$

则 $\cancel{A=(A_{ik}B_{kj})\quad C=}$

$$AB=(C_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,p\\ j=1,\cdots,q}},\ \text{其中 } C_{ij}\in\mathbb{R}^{m_i\times n_j}$$

且 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{il}B_{lj}$

证: 设 $A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}$, $B=(B_1,\cdots,B_q)$

其中 $A_i=(A_{i1},\cdots,A_{il})\in\mathbb{R}^{m_i\times s}$

$$B_j=\begin{pmatrix}B_{1j}\\ \vdots\\ B_{lj}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{s\times n_j}$$

则 $AB=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}(B_1,\cdots,B_q)$

$$=(A_iB_j)_{\substack{i=1,\cdots,p\\ j=1,\cdots,q}} \quad (\text{引理8.1 (iii)})$$

$$A_iB_j=(A_{i1},\cdots,A_{il})\begin{pmatrix}B_{1j}\\ \vdots\\ B_{lj}\end{pmatrix}$$

$$=A_{i1}B_{1j}+\cdots+A_{il}B_{lj} \quad (\text{引理8.3})$$

$$=C_{ij}$$

∎

例: 设 $D=\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_k \end{pmatrix}$

其中 $D_i\in M_{n_i}(\mathbb{R})$, $i=1,2,\dots k$

$$D^m=\begin{pmatrix} D_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & D_k^m \end{pmatrix}$$

例: 设 $D=\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$. $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

其中 $U\in M_k(\mathbb{R})$, $V\in M_l(\mathbb{R})$

$A_{11}\in M_k(\mathbb{R})$, $A_{22}\in M_l(\mathbb{R})$

[注. 此时必有 $A_{12}\in\mathbb{R}^{k\times l}$, $A_{21}\in\mathbb{R}^{l\times k}$]

求 DA

$$DA=\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} UA_{11} & UA_{12} \\ VA_{21} & VA_{22} \end{pmatrix}$$

类似 ~~设~~

$$AD=\begin{pmatrix} A_{11}U & A_{12}V \\ A_{21}U & A_{22}V \end{pmatrix}.$$

例: 矩阵乘法分解:

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $\operatorname{rank}(A)=r>0$

则存在 ~~m行r列~~ $B\in\mathbb{R}^{m\times r}$, $C\in\mathbb{R}^{r\times n}$

且 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(C)=r$

使得 $A=BC$

$$A=\underbrace{\overset{B}{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}}_{r}\underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad \end{bmatrix}}_{C}\}r$$

证: 由打洞定理 $\exists\, P\in M_m(\mathbb{R})$, $Q\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆

使得: $A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}Q$

$$=P\,\cancel{(E_r,0)}\underbrace{\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times r}(E_r,0)_{r\times n}}_{\text{引理 8.2 (ii)}}Q$$

设 $B=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$, $C=(E_r,0)Q$

则 $A=BC$ 且 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(C)=r$.

注：下学期用线性映射证明该公式

思考题：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $X\in\mathbb{R}^{n\times m}$

其中 $X=(x_{ji})_{n\times m}$. x_{ji} 是未知数

证明 $AXA=A$ 有解

引理8.4 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{k\times l}$

$C\in\mathbb{R}^{k\times n}$

则 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ C & B\end{pmatrix}_{(m+k)\times(n+l)}$

$\geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

特别地，当 $C=O_{k\times n}$ 时 等号成立

证：设 $M=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B\end{pmatrix}$

不妨设 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(p)}$ 是 $V_c(A)$ 的基

$\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(q)}$ 是 $V_c(B)$ 的基

设 $\alpha_1\vec{M}^{(1)}+\dots+\alpha_p\vec{M}^{(p)}+\beta_1\vec{M}^{(n+1)}+\dots+\beta_q\vec{M}^{(n+q)}=\vec{0}_{m+k}$

其中 $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}\vec{A}^{(1)}\\ \vec{C}^{(1)}\end{pmatrix}+\dots+\alpha_p\begin{pmatrix}\vec{A}^{(p)}\\ \vec{C}^{(p)}\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}\vec{0}_m\\ \vec{B}^{(1)}\end{pmatrix}+\dots+\beta_q\begin{pmatrix}\vec{0}_m\\ \vec{B}^{(q)}\end{pmatrix}=\vec{0}_{m+k}$$

$\Rightarrow \alpha_1\vec{A}^{(1)}+\dots+\alpha_p\vec{A}^{(p)}=\vec{0}_m$

$\Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_p=0$

$\Rightarrow \beta_1\vec{B}^{(1)}+\dots+\beta_q\vec{B}^{(q)}=\vec{0} \Rightarrow \beta_1=\dots=\beta_q=0$

于是 $\vec{M}^{(1)},\dots,\vec{M}^{(p)},\vec{M}^{(n+1)},\dots,\vec{M}^{(n+q)}$ 线性无关

$\Rightarrow \operatorname{rank}(M)\geq p+q=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

当 $C=O_{k\times n}$ 时

$\forall j\in\{1,2,\dots,n+l\}$

$\vec{M}^{(j)}\in\langle\vec{M}^{(1)},\dots,\vec{M}^{(p)}\rangle+\langle\vec{M}^{(n+1)},\dots,\vec{M}^{(q)}\rangle$

$=\langle\vec{M}^{(1)},\dots,\vec{M}^{(p)},\vec{M}^{(n+1)},\dots,\vec{M}^{(q)}\rangle$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(M)\leq p+q$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(M)=p+q$ ∎

例：证明 Sylvester's 不等式 即

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s$$

即：$\mathrm{rank}(AB) + s \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

证：法1　设 $M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix}_{(m+s)\times(n+s)}$

$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(AB) + \cancel{\mathrm{rank}}\ s$ （引理8.4）

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix}}_{N}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}}_{R}$$

$$PMQ = R$$

$\mathrm{rank}(P) = m+s$, $\mathrm{rank}(Q) = n+s$ ~~都~~满秩

$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(R)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{rank}(AB) + s \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

[引理8.4]

法2

设 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ E_s & B \end{pmatrix}_{(m+s)\times(n+s)}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_s \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} A & O \\ E_s & B \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} O & -AB \\ E_s & B \end{pmatrix}}_{N}$$

$$N \underbrace{\begin{pmatrix} E_s & -B \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} O & -AB \\ E_s & O \end{pmatrix}}_{R}$$

$$PMQ = R$$

$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(R) \overset{\text{引理8.4}}{=} \mathrm{rank}(AB) + s$

$\mathrm{rank}(M) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ ← 引理8.4

例：证明 Sylvester's 等式

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

则 $\operatorname{rank}(AB+E_m)+n=\operatorname{rank}(BA+E_n)+m$

证：设 $M_1=\begin{pmatrix} AB+E_m & O \\ O & E_n\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n\end{pmatrix}}_{P_1}\underbrace{\begin{pmatrix} AB+E_m & O \\ O & E_n\end{pmatrix}}_{M_1}=\underbrace{\begin{pmatrix} AB+E_m & -A \\ O & E_n\end{pmatrix}}_{M_2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} AB+E_m & -A \\ O & E_n\end{pmatrix}}_{M_2}\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n\end{pmatrix}}_{Q_1}=\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ B & E_n\end{pmatrix}}_{M_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n\end{pmatrix}}_{P_2}\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ B & E_n\end{pmatrix}}_{M_3}=\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n+BA\end{pmatrix}}_{M_4}$$

而 $\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n+BA\end{pmatrix}}_{M_4}\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n\end{pmatrix}}_{Q_2}$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n+BA\end{pmatrix}}_{M_5}$$

$M_2=P_1M_1$，$M_3=M_2Q_1$

$M_4=P_2M_3$，$M_5=M_4Q_2$

$$M_5=P_2M_3Q_2=P_2M_2Q_1Q_2=(P_2P_1)M_1(Q_1Q_2)$$

$\because P_1,P_2,Q_1,Q_2$ 满秩

$\therefore \operatorname{rank}(M_5)=\operatorname{rank}(M_1)$

$\operatorname{rank}(M_5)=m+\operatorname{rank}(E_n+BA)$，$\operatorname{rank}(M_1)=n+\operatorname{rank}(E_m+AB)$

注：下学期我们用线性映射来证明

思考题：设 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$．$AB=BA$

证明 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

§9 线性流形（~~...~~补充）

引理 9.1 设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 d-维子空间，则 ~~证明~~ V 是某个 n 元齐次线性方程组的解空间。

证：若 $V=(\vec{0})$，则 $V=V_E$。

设 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_d}$ 是 V 的一组基，由此扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_d},\vec{v_{d+1}},\dots,\vec{v_n}$

由线性映射基本定理，$\exists$

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

满足 $\varphi(\vec{v_1})=\vec{0},\ \dots\ \varphi(\vec{v_d})=\vec{0}$,

$\varphi(\vec{v_{d+1}})=\vec{v_{d+1}},\ \dots\ \varphi(\vec{v_n})=\vec{v_n}$

则 ~~ker~~ $\dim \ker(\varphi) \geq d$

$\dim(\mathrm{im}(\varphi)) \geq n-d$

由对偶定理 $\dim(\ker(\varphi))=d$

$\because V \subset \ker(\varphi)$

$\therefore V=\ker(\varphi)$

~~设~~ A 是 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基下的矩阵表示，则 $V=V_A$ ~~(见~~ p14 的注） $\square$

（见讲义 2-3

定义：设 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间

$\vec{v}+V$ 称为线性流形

定理 9.1 ~~$\mathbb{R}^n$ 中的线性流形~~ 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是线性流形，~~则~~ $\Longleftrightarrow$ S 是某个 n 元线性方程组的解。

证："$\Leftarrow$" 见讲义 2-4，p14 例

"$\Rightarrow$" 设 $S=\vec{v}+V$，其中 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$，$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间，由引理 9.1 $\exists$ n 列矩阵 A 使得

$$V=V_A$$

设 $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $A\vec{v}=\vec{w}$

设 $\vec{v}$ 是 $A\vec{x}=\vec{w}$ 的解

~~再由讲义~~ 再由讲义2-4，p14 例1)

$A\vec{x}=\vec{w}$ 的解是 $\vec{v}+V_A=\vec{v}+V=S$ 因

注：$\emptyset$ 也称为线性流形，它是不相容的方程组的解的集合

例：求

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 \\ x_1+2x_2 \qquad\quad -5x_4=1 \\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4=6 \\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4=7 \end{cases}$$

的解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -19 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -24 & 7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -36 & 16 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=-3 \\ \qquad\qquad x_3+3x_4=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

特解：$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ \qquad\qquad x_3+3x_4=0 \end{cases} \qquad \vec{w}_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~$x_1+2x_2=0$~~

解流形是 $\vec{v}+\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

定义：设 $\vec{v}+V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性流形，如果 $\dim V = n-1$，则称 $\vec{v}+V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面 (hyperplane)

推论9.1 设 $P \subset \mathbb{R}^n$.

则 P 是 $\mathbb{R}^n$ 的超平面 $\Longleftrightarrow$

$\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$. 不全为零. $\beta \in \mathbb{R}$

使得 P 是 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ 在

$\mathbb{R}^n$ 中解的集合.

证: "$\Leftarrow$" 因为 $\alpha_1, \dots \alpha_n$ 不全为零

$\therefore$ $\operatorname{rank}(\alpha_1, \dots \alpha_n) = 1$

且 $\operatorname{rank}(\alpha_1, \dots \alpha_n ; \beta) = 1$

$\Rightarrow$ 方程 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ 的解为

$\vec{v} + V$ 其中 $\dim V = n-1$

"$\Rightarrow$" 设 $P = \vec{v} + V$, 其中 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $n-1$ 维子空间. 由引理9.1

$\exists$ n列矩阵 A 使得 $V = V_A$. $\because \dim V_A = n-1$

$\therefore$ $\operatorname{rank}(A) = 1$. [对偶定理]

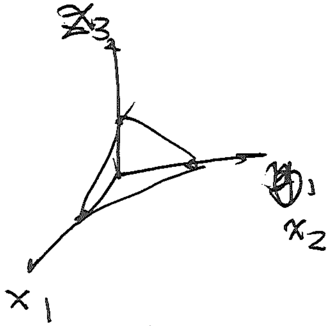
因此 设 $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ 是 A 中一个非零行

则 $V = V_{(\alpha_1, \dots \alpha_n)}$. 由定理9.1 证明可得

P 是 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ 的解 $\square$

其中 $\beta = (\alpha_1, \dots \alpha_n)\vec{v}$

例: 求过 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 的平面方程



设方程为 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$

代入点得

$\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \beta$. $\alpha_3 = \beta$

取 $\beta = 1$. 则方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. $\square$

第二章 行列式 (determinant)

§0 行列式的定义

定义: 设 $f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_m) \longmapsto f(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_m)$

称 f 为 m重线性函数 如果

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \dots m\}$

$$f(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_{k-1},\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{x}_{k+1},\cdots\vec{x}_m)$$

$$=\alpha f(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_{k-1},\vec{u},\vec{x}_{k+1},\cdots,\vec{x}_m)$$

$$+\beta f(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_{k-1},\beta,\vec{x}_{k+1},\cdots\vec{x}_m)$$

例：当 $m=1$ 时 f 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 线性函数

$$f(\vec{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n.$$

其中 $\alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$ 与 $\vec{x}$ 无关，$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

例：$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

$$f\left(\alpha\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=f\left(\begin{pmatrix}\alpha u_1+\beta v_1\\ \alpha u_2+\beta v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\alpha u_1+\beta v_1&y_1\\ \alpha u_2+\beta v_2&y_2\end{vmatrix}=(\alpha u_1+\beta v_1)y_2-y_1(\alpha u_2+\beta v_2)$$

$$=\alpha(u_1y_2-y_1u_2)+\beta(v_1y_2-y_1v_2)$$

$$=\alpha\begin{vmatrix}u_1&y_1\\u_2&y_2\end{vmatrix}+\beta\begin{vmatrix}v_1&y_1\\v_2&y_2\end{vmatrix}$$

$$=\alpha f\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)+\beta f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

类似可以验证 f 对第二个（行向量）变元也是线性的。于是

f 是二重线性函数。

f 是多重线性函数，则

例：设 f 是多重线性函数

$$f(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_{k-1},\vec{0},\vec{x}_{k+1},\cdots\vec{x}_m)=0$$

证：不妨设 $k=1$

$$f(\vec{0},\vec{x}_2,\cdots\vec{x}_m)=f(\vec{0}+\vec{0},\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_m)$$

$$=f(\vec{0},\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_m)+f(\vec{0},\vec{x}_2,\cdots\vec{x}_m)$$

$$\Rightarrow f(\vec{0},\vec{x}_2,\cdots\vec{x}_m)=0$$

□

设 $\vec{e}^{(1)},\cdots,\vec{e}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

$$\vec{x}_k=x_{1k}\vec{e}^{(1)}+\cdots+x_{nk}\vec{e}^{(n)},\quad k=1,2,\cdots m$$

设 f 是 m 重线性函数

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_m)=f\Big(\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_1,1}\vec{e}^{(i_1)},\ \vec{x}_2,\dots,\vec{x}_m\Big)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_1,1}f\Big(\vec{e}^{(i_1)},\ \sum_{i_2=1}^{n}x_{i_2,2}\vec{e}^{(i_2)},\ \vec{x}_3,\dots,\vec{x}_m\Big)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}x_{i_1,1}\sum_{i_2=1}^{n}x_{i_2,2}f\big(\vec{e}^{(i_1)},\vec{e}^{(i_2)},\vec{x}_3,\dots,\vec{x}_m\big)$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}x_{i_1,1}x_{i_2,2}f\Big(\vec{e}^{(i_1)},\vec{e}^{(i_2)},\sum_{i_3=1}^{n}x_{i_3,3}\vec{e}^{(i_3)},\ \vec{x}_4,\dots,\vec{x}_m\Big)$$

$$\cdots$$

$$\cancel{=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}x_{i_1,1}x_{i_2,2}\cdots x_{i_m,m}}$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}x_{i_1,1}x_{i_2,2}\cdots x_{i_m,m}f\big(\vec{e}^{(i_1)},\dots,\vec{e}^{(i_m)}\big)$$

令 $a_{i_1,\dots,i_m}=f\big(\vec{e}^{(i_1)},\dots,\vec{e}^{(i_m)}\big)$

则

$$(*):\quad f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_m)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}a_{i_1,\dots,i_m}x_{i_1,1}\cdots x_{i_m,m}$$

~~数~~ 设 $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_m)$ 是 m 重线性函数

如果 $\forall i,j\in\{1,\dots,m\},\ i\neq j$

$$f(\vec{x}_1,\dots,\underset{i}{\vec{x}_j},\dots,\underset{j}{\vec{x}_i},\dots,\vec{x}_m)=-f(\vec{x}_1,\dots,\underset{i}{\vec{x}_i},\dots,\underset{j}{\vec{x}_j},\dots,\vec{x}_m)$$

则称 f 是斜对称的.

则称 f 是 m 重斜对称线性函数

引理 0.1 设 f 是 m 重斜对称线性函数

~~则~~ ~~如果~~ $\forall i,j\in\{1,\dots,m\},\ i\neq j$

则 $f(\vec{x}_1,\dots,\underset{i}{\vec{v}},\dots,\underset{j}{\vec{v}},\dots,\vec{x}_m)=0$

证: $f(\vec{x}_1,\dots,\underset{i}{\vec{v}},\dots,\underset{j}{\vec{v}},\dots,\vec{x}_m)=-f(\vec{x}_1,\dots,\underset{i}{\vec{v}},\dots,\underset{j}{\vec{v}},\dots,\vec{x}_m)$

$$\Rightarrow\ 2f(\vec{x}_1,\dots,\vec{v},\dots,\vec{v},\dots,\vec{x}_m)=0$$

因为 $2\neq 0$. 所以 $f(\vec{x}_1,\cdots \underset{i}{\vec{v}} \cdots \underset{j}{\vec{v}} \cdots \vec{x}_m)=\vec{0}$ ∎

设 f 是 m 重斜对称的

则 (*) 变成为

$$f(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_n)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots i_m} x_{i_1,1}\cdots x_{i_m,1}$$

其中 $i_1,\cdots i_m \in \{1,\cdots n\}$ 两两不同

进一步再设 $m=n$

则 $i_1,\cdots i_n \in \{1,\cdots n\}$ 两两不同

即 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是一个置换

此时 (*)

$$f(\vec{x}_1,\cdots x_n)=\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),\cdots\sigma(n)} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n}$$

断言 $\forall \sigma\in S_n$

$$a_{\sigma(1),\cdots\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma a_{12\cdots n}$$

证: 设 $\sigma=\tau_1\cdots\tau_k$, 其中 $\tau_1,\cdots\tau_k$ 是对换

我们对 k 归纳. 当 $k=0$

σ 是恒同映射. 于是

$$a_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} = a_{12\cdots n} = \varepsilon_\sigma a_{12\cdots n}$$ ✓

$k=1$ 设 $\sigma=(i,j)$

$$a_{\sigma(1),\cdots\sigma(n)} = f(\vec{e}^{(1)}\cdots \underset{i}{\vec{e}^{(j)}},\cdots \underset{j}{\vec{e}^{(i)}},\cdots \vec{e}^{(n)})$$

$$= -f(\vec{e}^{(1)}\cdots \vec{e}^{(i)},\cdots \vec{e}^{(j)},\cdots \vec{e}^{(n)})$$ ✓

$$= -a_{12\cdots n} = \varepsilon_\sigma a_{12\cdots n}$$

设 ~~对~~ $k>1$, 且 $k-1$ 时断言成立

设 $\pi=\tau_2\cdots\tau_k$ 则 $\sigma=\tau_1\pi$

$$a_{\sigma(1),\cdots,\sigma(n)} = f(\vec{e}^{(\sigma(1))},\cdots,\vec{e}^{(\sigma(n))})$$

$$= f(\vec{e}^{(\tau_1\pi(1))},\cdots,\vec{e}^{(\tau_1\pi(n))})$$

$$= -f(\vec{e}^{(\pi(1))},\cdots\vec{e}^{(\pi(n))}) \underset{\text{归纳假设}}{=} -\varepsilon_\pi a_{12\cdots n} = \varepsilon_\tau a_{1\cdots n}$$ ∎