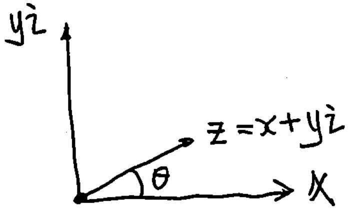
# 回忆




幅角 $\arg(z)=\theta$ $\cancel{\in[0,2\pi)}$

模长 $\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}$

$z = x+yi$ → 坐标表示

$= \|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)$ → 极坐标表示

命题1.2 设 $z_1=\|z_1\|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$
$z_2=\|z_2\|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
$z=\|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)$

(i) $z_1z_2=\|z_1\|\|z_2\|[\cancel{\cos\theta_1+i\sin}\ \cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ $z^n=\|z\|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(iii) 若 $z\neq0$ $z^{-1}=\frac{1}{\|z\|}(\cos\theta-i\sin\theta)$

注：由(ii)和(iii)可知，$\forall n\in\mathbb{Z}$
$z^n=\|z\|^n(\cos\theta+i\sin\theta)$. 其中 $z\neq0$

证：(i) $z_1z_2=\|z_1\|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\|z_2\|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=\|z_1\|\|z_2\|[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)]$

$=\|z_1\|\|z_2\|(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

(ii) $n=0,1$ 显然. 设 $n>1$. 且结论对 $n-1$ 成立

$z^n=z^{n-1}z=\|z\|^{n-1}(\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta)$ ←归纳假设
$\|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)$ [∵(i)]

$=\|z\|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(iii) $z\frac{1}{\|z\|}(\cos\theta-i\sin\theta)=\|z\|(\cos\theta+i\sin\theta)\frac{1}{\|z\|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ [∵(i)]

$=\frac{\|z\|}{\|z\|}(\cos(\theta-\theta)+i\sin(\theta-\theta))$

$=1$ ▨

$\Rightarrow$ $z^{-1}=\frac{1}{\|z\|}(\cos\theta-i\sin\theta)$.

定义：$e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$

定义的根据　函数的无穷级数展开.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$e^{i\theta} \text{"="} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = 2k \\ i^{2k} = (-1)^k \in \mathbb{R} \\ n = 2k+1 \\ i^{2k+1} = (-1)^k i \in \{yi \mid y \in \mathbb{R}\} \end{array}}$$

$$= \sum_{2k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{(2k)!} + i \sum_{2k+1=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{(2k)!} + i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{(2k+1)!}$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

注: $z = \|z\| e^{i\theta}$

$z_1 z_2 = \|z\| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z^n = \|z\| e^{in\theta}$

## §1.3 单位根



定义: 设 $n \in \mathbb{Z}^+$, $z \in \mathbb{C}$. 如果 $z^n = 1$

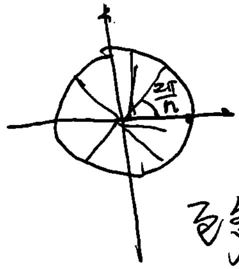
则称 $z$ 是一个 $n$ 次单位根

定理 1.1 设 $n \in \mathbb{Z}^+$. 则 $\mathbb{C}$ 中恰有 $n$ 个互不相同的单位根

$$U_n = \{ e^{\frac{2k\pi i}{n}} \mid k = 0, 1, \cdots n-1 \}$$

且 $(U_n, \cdot, 1)$ 是循环群

证: $\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = 1$ [命题1.1.(ii)]



$U_n$ 中的 $n$ 个元素显然两两不同

由定理2.6. 多项式 $f(z) = z^n - 1$ 至多有 $n$ 个根. 于是 $U_n$ 含有所有的单位根

$\cancel{(b^{-1})^n = (b^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \in U_n}$

设 $a, b \in U_n$　$(ab^{-1})^n = a^n b^{-n} = 1 \cdot 1 = 1$

~~即 $ab^{-1} \in U_n$~~

$\Rightarrow (U_n, \cdot, 1)$ 是 $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ 的子群

[第4章引理2.4]

$U_n=\langle e^{\frac{2\pi i}{n}}\rangle$ ▨

定义：设 $\varepsilon$ 是 $n$ 次单位根，如果 $U_n=\langle\varepsilon\rangle$，则 $\varepsilon$ 称为本原单位根

命题1.3 $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ 是本原单位根 $\Longleftrightarrow$ $\gcd(n,k)=1$

证："$\Rightarrow$" $\exists\, l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^l=e^{\frac{2\pi}{n}}\Rightarrow e^{\frac{(2kl-1)}{n}2\pi i}=1$$

$$\frac{\cancel{2}kl-1}{n}=s \qquad \text{其中 } \cancel{s=n}\ s\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow kl-sn=1 \quad\Longrightarrow \gcd(n,k)=1$$

"$\Leftarrow$" 设 $a,b\in\mathbb{Z}$，$an+bk=1$ [Bezout定理]

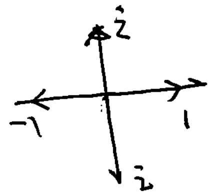
$$\left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)=\left[e^{\frac{2\pi}{n}}\right]^{an+bk}=\left(e^{\frac{2k\pi}{n}}\right)^b$$

$$\Rightarrow U_n=\langle e^{\frac{2k\pi}{n}}\rangle \quad \left(\because \langle e^{\frac{2\pi}{n}}\rangle=U_n\right)$$

▨



例：$n=4$




$1,\ e^{\frac{\pi}{2}i},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$e^{\frac{\pi}{2}i}=i$，本原；$e^{i\pi}=-1$；$e^{i\frac{3\pi}{2}}=i$，本原

例 循环行列式的展开

$$C_4=\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & b\\ b & c & d & a\end{bmatrix} \qquad a,b,c,d\in\mathbb{Q}$$

展开 $|C_4|$

解：设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 $U_4$ 中的元素

$$f_k=a+b\varepsilon_k+c\varepsilon_k^2+d\varepsilon_k^3,\quad k=1,2,3,4$$

$$\varepsilon_k f_k=a\varepsilon_k+b\varepsilon_k^2+c\varepsilon_k^3+d\varepsilon_k^4$$
$$=d+a\varepsilon_k+b\varepsilon_k^2+c\varepsilon_k^3$$

$$\varepsilon_k^2 f_k=\varepsilon_k(\varepsilon_k f)=d\varepsilon_k+a\varepsilon_k^2+b\varepsilon_k^3+c\varepsilon_k^4$$
$$=c+d\varepsilon_k+a\varepsilon_k^2+b\varepsilon_k^3$$

$$\varepsilon_k^3 f_k=\varepsilon_k(\varepsilon_k^2 f)=b+c\varepsilon_k+d\varepsilon_k^2+a\varepsilon_k^3$$

$$f_k = (a, b, c, d)\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon_k\\ \varepsilon_k^2\\ \varepsilon_k^3\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_k f_k = (d, a, b, c)\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon_k\\ \varepsilon_k^2\\ \varepsilon_k^3\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_k^2 f_k = (c, d, a, b)\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon_k\\ \varepsilon_k^2\\ \varepsilon_k^3\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_k^3 f_k = (b, c, d, a)\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon_k\\ \varepsilon_k^2\\ \varepsilon_k^3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}f_k\\ \varepsilon_k f_k\\ \varepsilon_k^2 f_k\\ \varepsilon_k^3 f_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & b\\ b & c & d & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon_k\\ \varepsilon_k^2\\ \varepsilon_k^3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & f_3 & f_4\\ \varepsilon_1 f_1 & \varepsilon_2 f_2 & \varepsilon_3 f_3 & \varepsilon_4 f_4\\ \varepsilon_1^2 f_1 & \varepsilon_2^2 f_2 & \varepsilon_3^2 f_3 & \varepsilon_4^2 f_4\\ \varepsilon_1^3 f_1 & \varepsilon_2^3 f_2 & \varepsilon_3^3 f_3 & \varepsilon_4^3 f_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ d & a & b & c\\ c & d & a & b\\ b & c & d & a\end{bmatrix}}_{C_4}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4\\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2\\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 & \varepsilon_4^3\end{bmatrix}}_{V_4}$$

$$\|$$

$$V_4\begin{pmatrix}f_1 & & & \\ & f_2 & & \\ & & f_3 & \\ & & & f_4\end{pmatrix}$$

$$|V_4| f_1 f_2 f_3 f_4 = |C_4|\,|V_4|$$

$$|V_4| \neq 0 \Rightarrow |C_4| = f_1 f_2 f_3 f_4$$

## §4.4 代数学基本定理



定理1.2 设 $f \in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$. 则 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 中有根.

推论1.1 设 $f \in \mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$. 则存在互不相同的复数 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$f = \beta\,(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$$

其中 $\beta = \mathrm{lc}(f)$.

注: 上述结论说明 $f$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中可以分解为若干一次因子之积. 等价地, $f$ 在 $\mathbb{C}$ 中根的个数 (记重数) 恰好是 $\deg(f)$ 个

证: 设 $n = \deg(f)$. 对于 $n$ 归纳

$n = 1$ 显然

设 $n>1$ 且结论对次数小于 $n$ 的多项式成立

由代数学基本定理：$\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ 使得 $f(\alpha_1)=0$

记 $m_1$ 是 $x-\alpha_1$ 在 $f$ 中的重数 则 $m_1>0$

于是 $f=(x-\alpha_1)^{m_1} g$，其中 $g \in \mathbb{C}[x]$

$\deg(g)<n$. 由归纳假设

$$f=(x-\alpha_1)^{m_1}\beta\,(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$$

$\beta=lc(g)$

其中 $\alpha_2,\dots,\alpha_s \in \mathbb{C}$ 两两不同. $m_2,\dots,m_s \in \mathbb{Z}^+$

进而 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 也不同（重数的定义） ☒

由命题2.2 $lc(g)=lc(f)$

推论1.2 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式的次数都小于等于2.

证：假设 $f \in \mathbb{R}[x]$，$\deg f \geq 3$ 且 $f$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中不可约.

因为 $f \in \mathbb{C}[x]$. 所以 $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$，使得

$f(\alpha)=0$ [代数学基本定理]

则 $\alpha \notin \mathbb{R}$ [余式定理]

设 $f=f_d x^d+\cdots+f_1 x+f_0$，$f_k \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha)=f_d\alpha^d+\cdots+f_1\alpha+f_0=0$$

取共轭 $\overline{f_d}\,\overline{\alpha}^d+\cdots+\overline{f_1}\,\overline{\alpha}+\overline{f_0}=0$

$\because f_k \in \mathbb{R}$ $\therefore \overline{f_k}=f_k$ $\because \alpha \notin \mathbb{R}$ $\therefore \overline{\alpha} \neq \alpha$

于是 $\overline{\alpha}$ 是 $f$ 的另一个根 且 $\alpha \neq \overline{\alpha}$

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})g(x), \quad g \in \mathbb{C}[x]$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})g(x)$$

$$=(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})g(x)$$

$$=\underbrace{(x^2-2\mathrm{Re}(\alpha)x+\|\alpha\|^2)}_{h(x)}g(x)$$

$h \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R}[x]$ $\rightarrow\leftarrow$ $f$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 不可约

注：$\mathbb{R}[x]$ 的多项式是 $\mathbb{R}[x]$ 若干一次式二次不可约多项式之积.

## §1.5 关于期末考试

不考的内容:
矩阵分块、线性流形 (超平面, 直线)
群论中Cayley定理, 置换群. 分式域, Lagrange定理

必考内容: 验证 Hamilton 四元数构成
可除环. [见讲义 4-2 page4 的例子]

考试范围:

1. $(M_n(F), +, O, \times, E)$ 方阵代入多项式
2. 矩阵求逆 (消去法, 多项式法)
3. 行列式展开 (消去法, 归纳(递归)法, 按行列展开)
4. 行列式理论和应用 (乘法定理, 伴随矩阵, 矩阵逆的公式, Cramer法则, 用子式刻化矩阵的秩)
5. 群 环 域, 域上的线性代数
同态同构剩余环(域) $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \cdots \mathbb{Z}_n)$ (域的特征)
6. 多项式 (除法, 赋值同态, gcd, Bezout, 因式分解)
7. 复数 (基本运算, 共轭)

## §1.6 关于复数的若干注记

注1 虚数不虚.

设 $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$(F, +, O, \cdot, E)$ 是域

交换性 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+cb \\ -cb-ad & ac-bd \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

若 $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_{A} \neq O \Rightarrow \det(A) = a^2+b^2 > 0$

$\Rightarrow A$ 在 $M_2(\mathbb{R})$ 中可逆

验证在 F 中可逆

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{a}{\det(A)} & \frac{-b}{\det(A)}\\ \frac{b}{\det(A)} & \frac{a}{\det(A)}\end{pmatrix}\in F.$$

考虑 $\varphi: F \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\longmapsto a+bi$$

可直接验证 $\varphi$ 是同态，又因为 $\varphi$ 的满射，于是 $\varphi$ 是同构 [域到域的同态必为单射 见讲义 4-2. 命题 4.1 page 10]

$$\varphi\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]\Rightarrow i$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2=-E$$

注：$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环，于是整环

但不是 UFD

我们来证明，$3\in\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 是不可约元

但不是素元

若 $3=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ ⑦

$\bar{3}=3=(a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})$

$9=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$

设 $a^2+5b^2\leq c^2+5d^2$

则 $a^2+5b^2=1$ 或 $a^2+5b^2=3$ [不可能]

$\Rightarrow a^2+5b^2=1 \Rightarrow b=0, a=\pm1 \Rightarrow$

$a+b\sqrt{-5}=\pm1$ 可逆 $\Rightarrow$ 3 不可约

$3 \mid 9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$

若 $3 \mid (2+\sqrt{-5})$ ~~或 $3\mid$~~

~~$3=(2+\sqrt{-5})(a+b\sqrt{-5})$~~

$a,b\in\mathbb{Z}$

$2+\sqrt{-5}=3(a+b\sqrt{-5})$

$2-\sqrt{-5}=3(a-b\sqrt{-5})$

$9=9(a^2+5b^2)$

$\Rightarrow a^2+5b^2=1 \Rightarrow a=\pm1,\ b=0$

$\Rightarrow 2+\sqrt{-5}=\pm3$ $\rightarrow\leftarrow$ ▨