第一章 空间与形式

§1 线性空间

§2 线性映射

§3 商空间与自然的线性映射

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

§3.1 商空间

定义 3.1 设 $\mathbf{x}\in V$ 且 $U\subset V$ 是子空间. 我们称 $\mathbf{x}+U$ 是以 U 为方向的线性流形.

引理 3.2 如果两个 V 中的线性流形相同, 则它们方向相同.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, X,Y 是 V 的子空间. 再设 $\mathbf{x}+X=\mathbf{y}+Y$. 我们要证明 $X=Y$.

由 $\mathbf{x}+X=\mathbf{y}+Y$ 可知, 存在 $\mathbf{w}\in Y$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{w}$. 于是 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in Y$.

设 $\mathbf{u}\in X$. 则 $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{u}\in\mathbf{x}+X$. 因为 $\mathbf{x}+X=\mathbf{y}+Y$, 所以存在 $\mathbf{v}\in Y$ 使得 $\mathbf{z}=\mathbf{y}+\mathbf{v}$. 我们计算

$$\mathbf{u}=\mathbf{z}-\mathbf{x}=(\mathbf{y}-\mathbf{x})+\mathbf{v}\in Y\implies X\subset Y.$$

同理, $Y\subset X$. $\square$

设 U 是 V 的子空间. 我们在 V 上定义如下等价关系.

定义 3.3 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 如果 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 U 等价. 记为 $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{y}$.

我们验证 $\sim_U$ 是等价关系. 首先, $\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0}\in U$. 于是对任意的 $\mathbf{x}\in V$, $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in U$. 于是 $\mathbf{y}-\mathbf{x}\in U$. 从而 $\mathbf{y}\sim_U\mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\sim_U\mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{z}\in U$. 于是

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{z}\in U.$$

于是 $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{z}$. 传递性成立.

引理 3.4 设 $\mathbf{x}\in V$ 且 $[\mathbf{x}]$ 是 $\mathbf{x}$ 所在的等价类. 则 $[\mathbf{x}]=\mathbf{x}+U$.

证明. 设 $\mathbf{u}\in U$. 则存在 $\mathbf{x}\sim_U\mathbf{x}+\mathbf{u}$. 于是 $\mathbf{x}+\mathbf{u}\in[\mathbf{x}]$. 由此可知, $\mathbf{x}+U\subset[\mathbf{x}]$. 再设 $\mathbf{y}\in[\mathbf{x}]$. 则 $\mathbf{y}-\mathbf{x}\in U$, 即存在 $\mathbf{u}\in U$ 使得 $\mathbf{y}-\mathbf{x}=\mathbf{u}$, 即 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{u}$, $\mathbf{y}\in\mathbf{x}+U$. 由此可知, $[\mathbf{x}]\subset\mathbf{x}+U$. $\square$

由上述引理可知

$$V/\sim_U = \{\mathbf{v} + U \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

为了化简符号, 我们用 V/U 记 $V/\sim_U$. 引理 3.2 说明商集 V/U 是所有方向为 U 的线性流形的集合. 与剩余环类似, V 上的加法和数乘可诱导出 V/U 中的线性运算.

设 $\mathbf{x}+U, \mathbf{y}+U \in V/U$ 和 $\alpha \in F$. 定义:

$$(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U \quad 和 \quad \alpha(\mathbf{x}+U) = (\alpha\mathbf{x})+U.$$

下面我们来验证这两个运算的良定义. 设 $\mathbf{x}+U = \mathbf{x}'+U$ 和 $\mathbf{y}+U = \mathbf{y}'+U$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{x}', \mathbf{y}-\mathbf{y}' \in U$. 于是

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}')+(\mathbf{y}-\mathbf{y}') = (\mathbf{x}+\mathbf{y})-(\mathbf{x}'+\mathbf{y}') \in U \implies (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim_U (\mathbf{x}'+\mathbf{y}') \implies (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U = (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')+U.$$

类似地, 对 $\alpha \in F$,

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}' \in U \implies \alpha\mathbf{x}-\alpha\mathbf{x}' \in U \implies \alpha\mathbf{x} \sim_U \alpha\mathbf{x}' \implies (\alpha\mathbf{x})+U = (\alpha\mathbf{x}')+U.$$

由 V 中的运算规律可知, V/U 是域 F 上的线性空间, 其中的“零向量” 是 $\mathbf{0}+U = U$. 我们称 V/U 是 V 关于 U 的商空间.

§3.2 自然的线性映射

设 $\pi_U : V \longrightarrow V/U$ 是自然投射, 即对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}+U$ (见上学期第一章讲义三第 12 页). 下面我们来验证 π_U 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned}
\pi_U(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})+U && (\pi_U \text{ 的定义})\\
&= ((\alpha\mathbf{x})+U)+((\beta\mathbf{y})+U) && (V/U \text{ 中加法的定义})\\
&= \alpha(\mathbf{x}+U)+\beta(\mathbf{y}+U) && (V/U \text{ 中数乘的定义})\\
&= \alpha\pi_U(\mathbf{x})+\beta\pi_U(\mathbf{y}) && (\pi_U \text{ 的定义}).
\end{aligned}$$

验证完毕.

设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的线性映射. 则对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y}) \iff \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \ker(\phi) \iff \mathbf{x} \sim_{\ker(\phi)} \mathbf{y}.$$

由上学期第一章讲义三第 12 页定理 3.1 可知存在唯一的单射 $\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 即下述图表交换.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\phi)}"'] & W \\
V/\ker(\phi) \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换. 特别有 $\mathrm{im}(\phi)=\mathrm{im}(\bar{\phi})$. 设 $\mathbf{x}+\ker(\phi)\in V/\ker(\phi)$. 则

$$\phi(\mathbf{x})=\bar{\phi}\circ\pi_{\ker(\phi)}(\mathbf{x})=\bar{\phi}(\mathbf{x}+\ker(\phi)).$$

于是

$$\begin{array}{rccc}\bar{\phi}: & V/\ker(\phi) & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{x}+\ker(\phi) & \mapsto & \phi(\mathbf{x}).\end{array}$$

定理 3.5 *(线性映射基本定理 I)* 设 $\phi: V\longrightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的映射. 则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi=\bar{\phi}\circ\pi_{\ker(\phi)}$. 特别地, $V/\ker(\phi)$ 与 $\mathrm{im}(\phi)$ 线性同构.

证明. 根据上文, 我们只需验证 $\bar{\phi}$ 是线性的.

令 $U=\ker(\phi)$. 设 $\alpha,\beta\in F$, $\mathbf{x}+U,\mathbf{y}+U\in V/U$. 则

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\alpha(\mathbf{x}+U)+\beta(\mathbf{y}+U)) &= \bar{\phi}((\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})+U) && (V/U\ \text{中的运算})\\ &= \phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) && (\bar{\phi}\ \text{的定义})\\ &= \alpha\phi(\mathbf{x})+\beta\phi(\mathbf{y}) && (\phi\ \text{线性})\\ &= \alpha\bar{\phi}(\mathbf{x}+U)+\beta\bar{\phi}(\mathbf{y}+U) && (\bar{\phi}\ \text{的定义}).\end{aligned}$$

验证完毕.

因为 $\bar{\phi}$ 是单射且 $\mathrm{im}(\phi)=\mathrm{im}(\bar{\phi})$. 我们有 $\bar{\phi}$ 是从 V/U 到 $\mathrm{im}(\phi)$ 的线性同构. □

推论 3.6 *利用上述定理的假设和符号, 再设 ϕ 是满射. 则 $V/\ker(\phi)$ 和 W 线性同构.*

证明. 由上述定理直接可得. □

推论 3.7 *设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 则 $V_2/(V_1\cap V_2)$ 和 $(V_1+V_2)/V_1$ 线性同构.*

证明. 设 $\phi: V_2\longrightarrow V_1+V_2$ 是嵌入, $\pi: V_1+V_2\longrightarrow (V_1+V_2)/V_1$ 是自然投射. 则 $\psi=\pi\circ\phi$ 是从 V_2 到 $(V_1+V_2)/V_1$ 的线性映射. 根据引理 3.4, 任意 $(V_1+V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+V_1$, 其中 $\mathbf{v}_1\in V_1,\mathbf{v}_2\in V_2$. 注意到 $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+V_1=\mathbf{v}_2+V_1$. 于是, 任何 $(V_1+V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $\mathbf{v}_2+V_1$. 我们推导:

$$\psi(\mathbf{v}_2)=\pi\circ\phi(\mathbf{v}_2)=\pi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_2+V_1.$$

于是 ψ 是满射. 若 $\mathbf{v}_2\in V_1\cap V_2$, 则 $\mathbf{v}_2+V_1=V_1$. 由此可知, $V_1\cap V_2\subset\ker(\psi)$. 反之, 设 $\mathbf{v}_2\in\ker(\psi)$. 则 $\psi(\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_2+V_1=V_1$. 于是, $\mathbf{v}_2\in V_1\cap V_2$. 从而 $\ker(\psi)=V_1\cap V_2$. 由推论 3.6, 这两个商空间线性同构. □

上述证明可以用下列交换图简洁地表示.

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi"] \\ V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1+V_2)/V_1 \end{tikzcd} \qquad \text{且} \quad \ker(\psi)=V_1\cap V_2.$$

推论 3.8 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且 $V_1 + V_2$ 是直和. 则 $(V_1 + V_2)/V_1$ 和 V_2 线性同构.

证明. 由推论 3.7, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 设 $\phi: V_2 \longrightarrow V_2$ 是恒同映射. 由推论 3.6, V_2 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 由此可知, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 V_2 线性同构. □

§4 基底与维数

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

§4.1 极大线性无关组

定义 4.1 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S \setminus M$, $M \cup \{\mathbf{v}\}$ 是线性相关集. 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

注解 4.2 由线性相关性的性质*(上学期第二章命题1.1)*可知, 上述定义等价于*:* 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

例 4.3 设 $S = \{x, x^3, 2x^3 + x\} \subset \mathbb{Q}[x]$. 求 S 中所有的极大线性无关组.
解. $S_1 = \{x, x^3\}$. 这是因为 $2x^3 + x = 2x^3 + x$. $S_2 = \{x, 2x^3 + x\}$. 这是因为 $x^3 = (1/2)(2x^3 + x) - (1/2)x$. $S_3 = \{2x^3 + x, x^3\}$. 这是因为 $\alpha(2x^3 + x) + \beta x^3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha = 0$, 从而 $\beta = 0$. 于是, S_3 是线性无关集. 注意到 $x = (2x^3 + x) - 2x^3$. 从而, S_3 也是极大线性无关组.

线性空间中的任何含有非零向量的子集都有极大线性无关集. 但证明这一结论需要 Zorn 引理(超限归纳法). 由于今后我们主要关心有限维线性空间, 下述结论已经够用了.

命题 4.4 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $T \subset S$ 是线性无关集. 再设 $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则下述断言成立.

(i) *(可扩充)* S 中的极大线性无关 M 集包含 T, 且 $\mathrm{card}(M) \le k$.

(ii) *(等势)* 设 M 和 N 是 S 中两个极大线性无关集. 则 $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$.

(iii) *(表示唯一)* 设 $M = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset S$. 则 M 是 S 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v} \in S$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s.$$

证明. (i) 注意到 V 中的任何向量都是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合. 由线性组合引理可知 V 中不可能有 $k+1$ 个线性无关的向量. 于是 S 中任何极大线性无关组至多包含 k 个元素. 若 T 是 S 中的极大线性无关组, 则令 $M = T$ 即可. 否则, 存在 $\mathbf{v} \in S$ 使得 $T_1 = T \cup \{\mathbf{v}\}$ 是线性无关集. 重复上述步骤, 我们得到一系列 S 中的线性无关集

$$T \subsetneqq T_1 \subsetneqq T_2 \subsetneqq \cdots.$$

由刚刚证明的结论可知, 这种扩充在有限步必然终止于 S 的一个极大线性无关集 M.

(ii) 因为 M 中的元素都是 N 中元素的线性组合, 所以线性组合引理蕴含 $\operatorname{card}(M) \le \operatorname{card}(N)$. 同理 $\operatorname{card}(N) \le \operatorname{card}(M)$.

(iii) 设 M 是 S 中的极大线性无关组. 则对于任意的 $\mathbf{v} \in S$ 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta \in F$, 不全为零, 使得

$$\beta \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s = \mathbf{0}.$$

注意到 $\beta \neq 0$. 否则 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ 线性相关. 于是.

$$\mathbf{v} = (-\beta^{-1}\alpha_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (-\beta^{-1}\alpha_s)\mathbf{w}_s.$$

若 $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{w}_s + \cdots + \lambda_s \mathbf{w}_s$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in F$, 则

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 + \beta^{-1}\alpha_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (\lambda_s + \beta^{-1}\alpha_s)\mathbf{w}_s.$$

由 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ 的线性无关性可知 $\lambda_1 = -\beta^{-1}\alpha_1, \ldots, \lambda_s = -\beta^{-1}\alpha_s$.

反之, 只要证明 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ 线性无关即可. 否则, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$, 不全为零, 使得 $\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \cdots \alpha_s \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$. 不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 则

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 \quad \text{和} \quad \mathbf{w}_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (-\alpha_1^{-1}\alpha_s)\mathbf{w}_s$$

把 $\mathbf{w}_1$ 表示成了两个不同的关于 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ 的线性组合. 矛盾. □

§4.2 基底和维数

定义 4.5 *线性空间 V 的极大线性无关组称为 V 一组基.*

如果 V 的极大线性无关组 B 有限, 则 V 的维数定义为 $\operatorname{card}(B)$. 否则 V 的维数定义为 ∞. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 V 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

由极大线性无关组的性质可知, 线性空间的维数是良定义的.

定义 4.6 *设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得*

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由命题 4.4 (iii) 可得.

例 4.7 *(坐标空间)* F^n 的标准基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n) = n$.

设 $A \in F^{m\times n}$. 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组在 F^n 中的解空间的维数是 $n - \operatorname{rank}(A)$ *(见上学期第二章定理 2.4 – 方程版的对偶定理)*.

例 4.8 *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j} \in F^{m\times n}$, 其中在 i 行 j 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2 \ldots, n$. 则

$$\{E_{i,j} \,|\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \, j \in \{1, 2 \ldots, n\}\}$$

是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n} = mn$.

证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S = \{E_{i,i} \,|\, i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} \,|\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \, i \neq j\}.$$

证明. 可直接验证 $S \subset \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1\le i<j\le n} b_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 S 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. 从而 $\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

例 4.9 *(代数空间)* $F[x]$ 的一组基是 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. 于是 $\dim F[x] = \infty$. 子空间 $F[x]^{(d)}$ 的一组基是 $\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 d.

此外 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为 $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$. 但 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ *(这个结论的证明需要其它数学知识)*.

例 4.10 因为当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 两两不同时, $e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 所以由 k 的任意性可知, $\dim \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

定理 4.11 *(基扩充定理) 设 V 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 V 的基底 T 使得 $S \subset T$.*

证明. 因为 V 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 4.4 直接推出定理. □

定理 4.12 *(线性映射基本定理 II) 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, W 是 F 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 使得*

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

证明. (存在性) 由命题 4.4, 对任意 $\mathbf{x} \in V$ 存在唯一的 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$

令 $\phi : V \longrightarrow W$ 由公式 $\phi(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$ 定义. 由坐标的唯一性可知, ϕ 是良定义的且 $\phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 再设 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= \phi\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{v}_i\right) \\
&= \phi\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i)\mathbf{v}_i\right) && (V \text{ 中的运算}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i)\mathbf{w}_i && (\phi \text{ 的定义}) \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{w}_i\right) && (W \text{ 中的运算}) \\
&= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义.})
\end{aligned}$$

于是, ϕ 是线性的. 存在性成立.

设 $\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 满足 $\psi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\psi(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i = \phi(\mathbf{x}).$$

唯一性成立. □

定理 4.13 设 V, W 是 F 上的有限维线性空间. 则 V 和 W 线性同构当且仅当

$$\dim(V) = \dim(W).$$

证明. 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 V 和 W 的基底. 由定理 4.12 存在线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 和 $\psi : W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i)$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是 $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理 4.12 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 V 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 W 上的恒同映射. 于是 ϕ 是线性同构.

反之, 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1 \phi(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_n \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. 于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 即 $\phi(\mathbf{v}_1), \ldots \phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 由定理 4.11 可知, $\dim(W) \geq \dim(V)$. 同理 $\dim(V) \geq \dim(W)$. 于是, $\dim(V) = \dim(W)$. □

§4.3 若干维数公式

在本小节中 V 是有限维线性空间.

引理 4.14 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \tag{1}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由定理 4.11 可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{v}_n + U) = U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n \mathbf{v}_n) + U = U$. 于是 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n \mathbf{v}_n) \in U$, 即存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \implies \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k + (-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. 于是 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 线性无关.

再设 $\mathbf{v} + U \in V/U$, 其中 $\mathbf{v} \in V$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ 使得

$$\mathbf{v} = \underbrace{\beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}+U &= \mathbf{x}+\mathbf{y}+U \\
&= (\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) && \text{(商空间中的运算)} \\
&= U+(\mathbf{y}+U) && (\mathbf{x}\in U) \\
&= \mathbf{y}+U && (U\ \text{是}\ V/U\ \text{中的零}) \\
&= \beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\beta_n(\mathbf{v}_n+U). && \text{(商空间中的运算)}
\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U)=n-k$. □

命题 4.15 *(i)* 设 U 是 V 的子空间, 则 $U\neq V$ 当且仅当 $\dim(U)<\dim(V)$.

(ii) 设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi: V\longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))=\dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期讲义第二章定理 1.2 (包含定理).

(方法2)

$$\dim(U)<\dim(V)\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\dim(V/U)>0\iff V/U\neq\{U\}\iff U\subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期讲义第二章定理 1.3 (维数公式).

(方法2) 由推论 3.7 和 定理 4.13,

$$\dim((V_1+V_2)/V_1)=\dim(V_2/(V_1\cap V_2))\overset{(1)}{\Longrightarrow}\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1)=\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) (方法1) 见上学期讲义第二章定理 3.2 (对偶定理–线性映射版).

(方法2) 由定理 3.5 和 定理 4.13,

$$\dim(V/\ker(\phi))=\dim(\mathrm{im}(\phi))\overset{(1)}{\Longrightarrow}\dim(V)-\dim(\ker(\phi))=\dim(\mathrm{im}(\phi)).\quad\square$$

命题 4.16 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1+\cdots+V_k)\leq\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k=1$ 时不等式显然成立. 设 $k>1$ 且不等式对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k) &= \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 4.15\ (\mathrm{ii}))\\ &\le \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\ &\le \dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})\end{aligned}$$

设 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时显然. 设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k) &= \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 4.15\ (\mathrm{ii}))\\ &= \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) && (\text{定理 } 1.12\ (\mathrm{iii}))\\ &= \dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i=1$. 则

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k) &= \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\because \text{命题 } 4.15\ (\mathrm{ii}))\\ &< \dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) \quad (\because V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)\neq\{\mathbf{0}\})\\ &\le \dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})\end{aligned}$$

矛盾. □