第一章 空间与形式

§1 线性空间

§2 线性映射

§3 商空间与自然的线性映射

§4 基底与维数

§5 坐标变换和线性映射的矩阵表示

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§5.1 坐标变换

定理 5.1 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n \in V$. 则 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P. \tag{1}$$

(此时称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 的变换矩阵.)

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}'_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 于是 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 线性无关. 因为 $\dim(V) = n$, 所以 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P\in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 (1) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1,\dots,\beta_n\in F$, 不全为零, 使得

$$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

由 (1),

$$\beta_1\mathbf{e}'_1+\cdots+\beta_n\mathbf{e}'_n=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$. 再设 $Q\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0})=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. $\square$

定理 5.2 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x}\in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,\dots,x_n)^t$ 和 $(x'_1,\dots,,x'_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x}=(\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_n)\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.\quad\square$$

例 5.3 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad 和\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x}=(5,1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *5.1* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是一组基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *5.2*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.4 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中 是不是一组基.
解. 展开得 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$. 于是

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 *5.1*, p_1, p_2, p_3 是一组基.

§5.2 线性映射的矩阵表示

在本小节中 V 是 n 维线性空间, W 是 m 维线性空间. 它们具有共同的基域 F. 在设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 是 W 的一组基.

定理 5.5 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则存在唯一的 $A \in F^{m \times n}$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\phi(\mathbf{x})$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

此时称 A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵表示.

证明. (存在性) 设 $\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

则 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A.$$

由此可知

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1\phi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\phi(\mathbf{e}_n) = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知 (2) 成立.

(唯一性) 再设 $B \in F^{m\times n}$ 使得把 (2) 中 A 换成 B 后等式成立. 则对于任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\vec{B}^{(j)}$. 由坐标的唯一性可知 $\vec{B}^{(j)} = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是 $A = B$. $\square$

例 5.6 设 $f \in \mathrm{Hom}(V, F)$, 即 f 是 V 上的线性函数. 求 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 *1* 下的矩阵.
解. 设 $f(\mathbf{e}_j) = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则 f 在上述基底下的矩阵是 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $f(\mathbf{x})$ 关于 1 的坐标和其本身相同. 于是

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

例 5.7 设 $\phi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ 是 d/dx. 求 ϕ 在 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 和 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵.
解. 注意到, $\phi(1) = 0$, $\phi(x^k) = kx^{k-1}$, $k = 1, 2 \ldots, n-1$. 于是

$$(\phi(1), \phi(x), \phi(x^2), \ldots, \phi(x^{n-1})) = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}.$$

设 $p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-1}x^{n-1}$. 则 $\phi(p)$ 在 $1, x, x^2, \ldots, n-1$ 下的坐标是

$$A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ \vdots \\ (n-1)p_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \phi(p) = p_1 + 2p_2 x + \cdots + (n-1)p_{n-1}x^{n-2}.$$

例 5.8 设 $W = F^n$ 且 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是其标准基. 由线性映射基本定理*II(*第一章第二次讲义定理 *4.12)*可知存在$\phi \in \mathrm{Hom}(V, F^n)$ 使得 $\phi(\mathbf{e}_j) = \epsilon_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则 ϕ 关于这两组基的矩阵表示是 n 阶单位方阵. 由坐标的唯一性可知, ϕ 是线性同构. 但这个同构不是"自然的", 因为它的定义依赖于基底的选择.

§6 对偶空间

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

§6.1 对偶基

线性空间 $\mathrm{Hom}(V, F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^*. 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\mathrm{Map}(V, F)$ 给出.

例 6.1 设 $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是标准基. 则 V^* 是如下线性函数的集合: 对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & ax + by. \end{array}$$

注意到对于不同的 a, b, f 是不一样的.

从几何上看非零向量 $\mathbf{v} = (-b, a)^t$ 代表直线 $\langle \mathbf{v} \rangle$, 而 $ax + by = 0$ 代表该直线的方程, 即 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 是 $ax + by = 0$ 的解空间.

对偶空间的想法可以追溯到我们上学期学的知识: 一个子空间既可以通过它的一组生成元张成又可以看成某个齐次线性方程组的解. 这两个观点在具体的例子中各有所长.

定理 6.2 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 特别地, $\dim(V^*) = n$. *(*称 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的对偶基*.)*

证明. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 由线性映射基本定理II(定理 4.12)可知这样的 $\mathbf{e}_i^*$ 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的一组基即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots \alpha_n \mathbf{e}_n^* = \mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则

$$0 = \mathbf{0}^*(\mathbf{e}_i) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^* \right)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \ldots, n$. 令 $g = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n^*$. 则对于任意 $j \in \{1.2. \ldots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理II中的唯一性可知, $f = g$. □

例 6.3 对偶基为取坐标提供了一定的方便. 设 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$. 证明: 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$ *for all* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

例 6.4 设 $\dim(V) = n$, $f \in V^* \setminus \{\mathbf{0}^*\}$. 则存在一组 V 的基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得对任意的 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$, 我们有 $f(\mathbf{x}) = x_1$.

证明. 因为 $f \neq \mathbf{0}^*$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{v}) = \lambda \neq 0$. 设 $\mathbf{e}_1 = \lambda^{-1} \mathbf{v}$. 则 $f(\mathbf{e}_1) = 1$. 于是对任意 $\alpha \in F$, $f(\alpha \mathbf{e}_1) = \alpha$. 由此可知 $\mathrm{im}(f) = F$. 从而 $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$. 有第一章第二讲命题 *4.15 (iii)*, $\dim(\ker(f)) = n - 1$. 设 $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\ker(f)$ 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1 \notin \ker(f)$, 所以 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关. 它们是 V 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \right) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) = x_1. \quad \square.$$

引理 6.5 设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $f \in V^*$. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. 于是

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right) (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})) = 0.$$

由例 6.3 可知 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 0$. □

定理 6.6 下列映射

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \epsilon_{\mathbf{v}} \end{array}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\mathbf{v}}: & V^* & \longrightarrow & F \\ & f & \mapsto & f(\mathbf{v}). \end{array}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in V^*$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) + \beta g(\mathbf{v}) = \alpha \epsilon_{\mathbf{v}}(f) + \beta \epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^*$,

$$\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}}(f) = f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) = \alpha \epsilon_{\mathbf{u}}(f) + \beta \epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}} + \beta\epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 时双射. 由定理 6.2 可知, $\dim(V^{**}) = n$. 因为 $\operatorname{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)) = n$. 我们只要验证 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f \in V^*$, $f(\mathbf{v}) = 0$. 则 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (见例 6.3) □

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 于是我们说 V 与 V^{**} 自然同构.

§6.2 应用

例 6.7 设 $U \subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

生成. 求行数最小的矩阵 A 使得 U 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解.

解. 设所求矩阵为 A. 可直接验证 $\dim(U) = 2$. 于是 A 有两行且这两行线性无关. 设 A 中的一行是 (x_1, x_2, x_3, x_4). 则它是方程组

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解. 解空间的基给出我们所需要的向量. 具体的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

它的两个线性无关解是设 $U \subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix}.$$

例 6.8 设 $U=\langle \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k\rangle$ 和 $W=\langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\rangle$ 是 F^n 的两个子空间. 同时它们分别是 $A\in F^{\ell\times n}$ 和 $B\in F^{s\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 则 $U+W$ 的一组生成元是 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_k,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$. 但构造矩阵 C 使得 $U+W$ 是以 C 为矩阵的齐次线性方程组的解空间就不那么直接. 类似地, 构造 $U\cap W$ 的生成元比较麻烦, 但以

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间等于 $U\cap W$.

设 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_\ell\in V$ 和 $f_1,\dots,f_k\in V^*$. 令

$$M\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} = (f_i(\mathbf{v}_j))_{k\times\ell}.$$

引理 6.9 设 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_\ell\in V$ 和 $f_1,\dots,f_k\in V^*$. 再设 $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_\ell\mathbf{v}_\ell$. 则

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix}.$$

证明. 等式左侧第 i 行是 $f_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j f_i(\mathbf{v}_j)$. 它恰好是等式右边的第 i 行, $i=1,2,\dots,k$. □

引理 6.10 设 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_\ell\in V$. 则下列断言等价:

(i) $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_\ell$ 线性相关;

(ii) 对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$, $f_1,\dots,f_k\in V^*$,

$$\operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right) < \ell.$$

(iii) 设 $g_1,\dots,g_n$ 是 V^* 的一组基,

$$\operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right) < \ell.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\in F$ 不全为零使得 $\mathbf{0}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_\ell\mathbf{v}_\ell$. 由引理 6.9,

$$M\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ 不全为零, 所以上述方程组的系数矩阵不可能列满秩.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 由 (iii) 中矩阵秩的条件可知, 存在 $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in F$ 不全为零使得

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_\ell \mathbf{v}_\ell$. 由引理 6.9 可知, $g_i(\mathbf{v}) = 0 = g_i(\mathbf{0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是 $\mathbf{v} = 0$ (见引理 6.5). (i) 成立. □

定理 6.11 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$ 和 $g_1, \ldots, g_n \in V^*$ 是一组基. 则

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \right).$$

证明. 设

$$r = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \right).$$

不妨设该矩阵中前 r 列线性无关. 我们只要证明 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 是 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$ 的一组基即可.

注意到这前 r 列组成的子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r \end{pmatrix}$$

的秩等于 r, 由引理 6.10, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 线性无关. 设 $j \in \{r+1, r+2, \ldots, \ell\}$. 则子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_{n-1} & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_j \end{pmatrix}$$

的秩仍等于 r, 故秩小于 $r+1$. 再由引理 6.10, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_j$ 线性相关. 于是 $\mathbf{v}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. 由此可知 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 是 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$ 的一组基. □