# 第一章 空间与形式

## §1 线性空间

## §2 线性映射

## §3 商空间与自然的线性映射

## §4 基底与维数

## §5 坐标变换和线性映射的矩阵表示

## §6 对偶空间

## §7 双线性型

本节中 $V$ 是 $F$ 上的 $n$ 维线性空间, $n>0$.

### §7.1 定义和矩阵表示

设

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times V & \longrightarrow & F \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & f(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{array}$$

如果对任意的 $\alpha,\beta\in F$ 和 $\mathbf{z}\in V$ 满足

$$f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}) \quad \text{和} \quad f(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{x},\mathbf{z}),$$

则称 $f$ 是 $V$ 上的双线性型.

**例 7.1** 设 $f$ 是 $V$ 上的双线性型. 则对任意的 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ 和 $\alpha,\beta\in F$, 我们有:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{u},\mathbf{x}+\mathbf{y})+f(\mathbf{v},\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\mathbf{u},\mathbf{x})+f(\mathbf{u},\mathbf{y})+f(\mathbf{v},\mathbf{x})+f(\mathbf{v}+\mathbf{y})$$

且

$$f(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x},\beta\mathbf{y})=\alpha\beta f(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

此外

$$f(\mathbf{0},\mathbf{y})=f(\mathbf{0}+\mathbf{0},\mathbf{y})=f(\mathbf{0},\mathbf{y})+f(\mathbf{0},\mathbf{y}) \implies f(\mathbf{0},\mathbf{y})=0.$$

同理, $f(\mathbf{x},\mathbf{0})=0$.

**定理 7.2** 设 $V$ 的一组基是 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, $f$ 是 $V$ 上的双线性型. 则存在唯一的矩阵 $A\in \mathrm{M}_n(F)$ 使得,

$$\forall\ \mathbf{x}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\mathbf{y}=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

事实上, $A=(f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 称 $A$ 是 $f$ 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示.

**证明.** 我们计算

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)x_iy_j. \end{aligned}$$

令 $A=(f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 由上式直接验证得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

再设 $B=(b_{i,j})\in\mathrm{M}_n(F)$ 使得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\dots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

对 $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, 取 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_i,\mathbf{y}=\mathbf{e}_j$, 则

$$f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\Big(0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},\dots,0\Big)\quad B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad\to j=\vec{B}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad\to j=b_{i,j}.$$

于是 $A=B$. □

**例 7.3** 设 $V=\mathbb{R}^2$. 对任意的

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\det\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}.$$

验证 $f$ 是 $V$ 上的双线性型, 并求它在标准基下的矩阵.

**解.** 设 $\alpha,\beta\in F,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$,

$$\begin{aligned}f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})&=\det(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})=\det(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})+\det(\beta\mathbf{z},\mathbf{y})\\&=\alpha\det(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta\det(\mathbf{z},\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

类似 $f$ 对第二个变元线性. 于是 $f$ 是双线性型.

注意到 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=0$, $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=1$ 而 $f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=-1$. 于是

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

设 $f$ 是 $V$ 上的双线性型, $f$ 在 $V$ 的两组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n$ 下的矩阵分别是 $A$ 和 $B$. 再设

$$(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P,\quad P\in\mathrm{GL}_n(F).$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=u_1\epsilon_1+\cdots+u_n\epsilon_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n=v_1\epsilon_1+\cdots+v_n\epsilon_n$. 则由坐标变换公式可得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(u_1,\dots,u_n)P^tAP\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=(u_1,\dots,u_n)B\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}.$$

根据定理 7.2, $B=P^tAP$. 反之, 给定 $F^n$ 的一组基 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$, $f$ 在给定基底下的矩阵是 $A$, 则 $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P$ 是 $F^n$ 的一组基. 由上述计算可知 $f$ 在新的基底下的矩阵是 $P^tAP$.

**定义 7.4** 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$, 则称 $B$ 合同于 $A$, 记为 $B\sim_c A$.

我们来验证 $\sim_c$ 是等价关系. 对任意 $A\in\mathrm{M}_n(F)$, $A=E^tAE\implies A\sim_c A$. 自反性成立. 设 $B\sim_c A$. 则存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$. 于是

$$A=(P^t)^{-1}BP^{-1}=(P^{-1})^tBP^{-1}\implies A\sim_c B.$$

对称性成立. 设 $A \sim_c B$, $B \sim_c C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t BP,\, B = Q^t CQ \implies A = P^t Q^t CQP = (QP)^t C(QP) \implies A \sim_C C.$$

传递性成立.

从以上论述我们看出, 一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的. 而两个彼此合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵. 于是, 研究双线性型等价于研究方阵在合同意义下的等价类. 利用矩阵的语言, 我们所要研究的问题是: $\mathrm{M}_n(F)/\sim_c$ 含有多少不同的等价类? 在每个等价类中可否找出一个"标准" 的代表元? 这个代表矩阵中应该含有尽可能多个 0, 而非零元素出现的位置应该尽可能有规律.

**命题 7.5** 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果 $A \sim_c B$, 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

**证明.** 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = P^t BP$. 因为 $P$ 满秩, 所以 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. (见上学期讲义第二章推论 4.3) $\square$.

**定义 7.6** 设 $f$ 是 $V$ 上的双线性型, $A$ 是 $f$ 在 $V$ 的某组基下的矩阵. 则 $f$ 的秩定义为 $\mathrm{rank}(A)$, 记为 $\mathrm{rank}(f)$.

由上述命题可知, $\mathrm{rank}(f)$ 是良定义的.

下面两个例子说明双线性型可以通过矩阵或多项式给出.

**例 7.7** 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n \times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

是 $F^n$ 上的双线性型, $f$ 在标准基下的矩阵是 $A$.

**证明.** 设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t, \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t, \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$, $\alpha, \beta \in F$. 则

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta z, y) = (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z})^t A\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^t A\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{z}^t A\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

于是 $f$ 对第一个变元线性. 类似可验证 $f$ 对第二个变元也线性. 从而 $f \in \mathcal{L}_2(F^n)$.

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $F^n$ 的标准基, $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 则 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 由定理 7.2, $f$ 在标准基下的矩阵是 $A$. $\square$

**例 7.8** 设 $f \in F[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n]$, 齐 2 次, 对任意 $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\deg_{x_i}(f) \le 1$ 且 $\deg_{y_i}(f) \le 1$. 把 $f$ 看成从 $F^n \times F^n$ 到 $F$ 的函数, 由公式

$$\forall\ \mathbf{v} = (v_1,\dots,v_n)^t \in F^n, \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n)^t \in F^n, f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n).$$

则 $f$ 是 $F^n \times F^n$ 上的双线性型.

**证明.** 设 $a_{i,j}$ 为多项式 $f$ 中关于 $x_iy_j$ 的系数, $i,j\{1,2,\dots,n\}$. 令 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 可直接验证

$$f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (v_1,\dots v_n)A\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

由上例可知 $f$ 是双线性型.

**定义 7.9** 设 $f$ 是 $V$ 上的双线性型. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 $f$ 是对称的. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 $f$ 是斜对称的.

**例 7.10** 设 $V$ 的一组基是 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, $V$ 上的双线性型 $f$ 在该基下的矩阵是 $A$. 证明 $A$ *(斜)*对称当且仅当 $f$ *(斜)*对称.

**证明.** 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad 和 \quad f(\mathbf{y},\mathbf{x}) = (y_1,\dots,y_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in F \implies f(\mathbf{x},\mathbf{y})^t = f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

如果 $A = A^t$, 则 (1) 蕴含 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})$. 反之, 设 $f$ 对称. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i), i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. 由定理 *7.2* 可知, $A$ 对称.

类似地, 可证明斜对称情形的结论.

我们用 $\mathcal{L}_2(V)$ 记 $V$ 上所有双线性型的集合, $\mathcal{L}_2^+(V)$ 和 $\mathcal{L}_2^-(V)$ 分别记 $V$ 上对称和斜对称双线性型的集合. 可直接验证它们都是 $\mathrm{Map}(V\times V,F)$ 的子空间.

**命题 7.11** 设 $F$ 的特征不等于 2. 则 $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^+(V) \oplus \mathcal{L}_2^-(V)$.

**证明.** 设 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{L}_2(V)$. 则

$$f^+ = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})+f(\mathbf{y},\mathbf{x})) \in \mathcal{L}_2^+(V), f^- = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x},\mathbf{y})-f(\mathbf{y},\mathbf{x})) \in \mathcal{L}_2^-(V), \quad 且 \quad f = f^+ + f^-.$$

于是 $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^+(V) + \mathcal{L}_2^-(V)$. 设 $g \in \mathcal{L}_2^+(V) \cap \mathcal{L}_2^-(V)$. 则 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\mathbf{x})$ 且 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. 于是

$$f(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -f(\mathbf{y},\mathbf{x}) \implies 2f(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0 \implies f(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0.$$

由此可知, $\mathcal{L}_2^+(V) \cap \mathcal{L}_2^-(V) = \{\tilde{\mathbf{0}}\}$. 从而 $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^+(V) \oplus \mathcal{L}_2^-(V)$. □

**例 7.12** 合同关系保持对称和斜对称性. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ *(斜)*对称, 且 $A \sim_c B$. 证明 $B$ 也*(斜)*对称.

**证明.** 设 $A$ 斜对称. 因为 $A \sim_c B$, 所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$. 则 $B^t = (P^t A P)^t = P^t A^t P = -P^t A P = -B$. 对称情形类似. □

## §7.2　对称双线性型

本节的主要结果是

**定理 7.13** 设 $F$ 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则 $V$ 中有一组基使得 $f$ 在该基下的矩阵是对角阵.

证明该定理需要对称双线性型的极化公式. 设 $F$ 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right). \tag{2}$$

验证如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) && \text{(双线性)} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) \\
&= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). && \text{(对称性)}
\end{aligned}$$

**定理 7.13 的证明.** 如果 $f$ 是零映射, 则 $f$ 在 $V$ 的任意基底下的矩阵都是零矩阵. 定理显然成立. 设 $f$ 不是零映射. 再设 $n = \dim(V)$. 我们对 $n$ 归纳. 当 $n = 1$ 时, 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 成立.

由极化公式 (2), 存在 $\mathbf{e}_1 \in V$ 使得 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$. 令 $W = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = 0\}$. 可直接验证 $W$ 是子空间. 我们来证明

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus W. \tag{3}$$

首先, 设 $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap W$. 则 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_1$, 其中 $\lambda \in F$, 且 $f(\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 于是 $\lambda f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 因为 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由第一章第一讲定理 1.12 (iii), $\langle \mathbf{e}_1 \rangle + W$ 是直和. 由第一章第二讲命题 4.16, 只要证明 $\dim(W) = n - 1$ 即可. 考虑线性映射

$$\begin{array}{rccc}
\phi: & V & \longrightarrow & F \\
& \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1).
\end{array}$$

则 $W=\ker(\phi)$. 因为 $\phi(\mathbf{e}_1)\neq 0$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi))\geq 1$. 但 $\mathrm{im}(\phi)\subset F$ 且 $\dim F=1$. 于是 $\mathrm{im}(\phi)=F$. 特别地 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=1$. 由对偶公式(第一章第二讲命题 4.15), $\dim(W)=n-1$. 直和分解 (3) 成立.

设 $g\in\mathcal{L}_2(W)$ 满足对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$, $g(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. 由归纳假设存在 $W$ 的一组基 $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 使得 $g$ 在该基下的矩阵是对角的, 即对任意的 $i,j\in\{2,3,\ldots,n\}, i\neq j$, 我们有 $g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$. 由 (3), $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 线性无关 (见第一章第一讲定理 1.12 (ii))且 $\dim(V)=n$. 于是 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 $V$ 的一组基. 由 $W$ 的定义可知 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_1)=0$, $i=2,3,\ldots,n$. 在由 $f$ 的对称性可知 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_i)=0$, $i=2,3,\ldots,n$. 综上所述 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$, $i,i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i\neq j$. 于是 $f$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. □

**定义 7.14** 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$, $f$ 在 $V$ 的基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. 则称 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 $f$ 的一组规范基. 设双线性型 $f$ 在一组规范基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n$$

称为与规范基对应的规范型, 其中 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$.

**推论 7.15** 设 $F$ 的特征不等于 2, $A\in\mathrm{SM}_n(F)$. 则 $A$ 合同于一个对角阵.

**证明.** 考虑双线性型

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n\times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} & \mapsto & (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}. \end{array}$$

因为 $A$ 对称, 所以 $f$ 对称. 由上述定理存在 $F^n$ 的一组基使得 $f$ 在该基下的矩阵是对角阵 $B$. 则 $A\sim_c B$. □

**例 7.16** 求 $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}_{A}P$$

是对角矩阵.

**解.** 设 $f$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上对称双线性型, 它在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 下的矩阵是 $A$.

**步骤 1.** 选取 $\epsilon_1$ 使得 $f(\epsilon_1,\epsilon_1)\neq 0$. 令 $\epsilon_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$. 则

$$f(\epsilon_1,\epsilon_1)=f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=2.$$

**步骤 2.** 确定 $W=\ker(f(\mathbf{x},\epsilon_1))$ 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x},\epsilon_1)=(x_1,x_2,x_3)A(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=x_1+x_2+2x_3.$$

解方程 $x_1+x_2+2x_3=0$ 得到 $W$ 的一组基

$$\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

**步骤 3.** 求 $g:=f|_{W\times W}$ 在 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 下的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}f(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\\ f(\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}.$$

到此降维到 $W$ 上的对称双线性型 $g$.
**步骤 1.** 选取 $\epsilon_2$ 使得 $g(\epsilon_2,\epsilon_2)\neq 0$. 令 $\epsilon_2=\mathbf{w}_1$.
**步骤 2.** 确定 $Z=\ker(g(\mathbf{x},\epsilon_2))$ 的一组基. 我们计算

$$g(\mathbf{y},\epsilon_2)=(y_1,y_2)B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-2y_1-2y_2.$$

解方程 $-2y_1-2y_2=0$ 得到解空间的一组基

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Longrightarrow Z \text{ 的基是 } (\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

于是, $f$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范基是

$$\epsilon_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_2=\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_3=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

从 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 的矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

计算得

$$P^tAP=\operatorname{diag}(2,-2,-2).$$

**推论 7.17** 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $\mathrm{rank}(f) = r$. 则存在 $V$ 的一组规范基使得 $f$ 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$.

**证明.** 由定理 7.13, 存在 $f$ 规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 于是 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 因为 $r = \mathrm{rank}(A)$, 所以在 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)$ 中恰好有 $r$ 个非零. 适当调整下标后, 我们可以得到一组新的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 满足 $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$,

$$f(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, r,\ \text{且}\ f(\epsilon_j, \epsilon_j) = 0,\ j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

令 $\lambda_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 即可. □

**推论 7.18** 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A) = r$. 则存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$ 使得

$$A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0).$$

**证明.** 由上述推论直接可得. □

**例 7.19** 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$ 且 $r = \mathrm{rank}(A)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

**证明.** 由推论 *7.18*, $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 是非零复数. 由代数学基本定理 $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}$ 是复数. 令

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}\right).$$

则 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 且对称. 直接计算

$$A \sim_c P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P = P \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \quad \square$$