第一章　空间与形式

§1　线性空间

§2　线性映射

§3　商空间与自然的线性映射

§4　基底与维数

§5　坐标变换和线性映射的矩阵表示

§6　对偶空间

§7　双线性型

§8　二次型(quadratic forms)

§9　实二次型

在本节中 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间.

§9.1　惯性定理

定理 9.1 *惯性定理(见上次讲义)*

定义 9.2 *二次型的签名(见上次讲义)*

推论 9.3 *矩阵版的惯性定理(见上次讲义)*

定义 9.4 *矩阵的签名(见上次讲义)*

推论 9.5 *实对称矩阵合同的判定法则(见上次讲义)*

例 9.6 设

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A^2). \end{array}$$

证明 q 是二次型并求其签名.

证明. 设 $A=(a_{i,j})$. 则

$$q(A)=\operatorname{tr}(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}a_{j,i}=\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}^2+\sum_{1\le i<j\le n}2a_{i,j}a_{j,i}.$$

于是 q 是二次型. 考虑可逆坐标变换

$$z_{i,i}=a_{i,i},\ i=1,2,\ldots,n,\quad \text{和}\quad a_{i,j}=z_{i,j}+z_{j,i},\ a_{j,i}=z_{i,j}-z_{j,i},\quad i,j\in\{1,2,\ldots,n\},i\neq j.$$

则

$$q=\sum_{i=1}^{n}z_{i,i}^2+\sum_{1\le i<j\le n}2(z_{i,j}^2-z_{j,i}^2).$$

于是 q 的正惯性指数是 $n(n+1)/2$ 而负惯性指数是 $n(n-1)/2$. 从而 q 的签名为

$$\left(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

§9.2 （半）正定二次型

定义 9.7 设 q 是 V 上的二次型.

(i) 如果对于任意 $\mathbf{x}\in V$, $q(\mathbf{x})\ge 0$, 则称 q 是半正定的 *(semi-positive definite);*

(ii) 如果对于任意 $\mathbf{x}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x})>0$, 则称 q 是正定的 *(positive definite);*

(iii) 如果对于任意 $\mathbf{x}\in V$, $q(\mathbf{x})\le 0$, 则称 q 是半负定的 *(semi-negative definite);*

(iv) 如果对于任意 $\mathbf{x}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x})<0$, 则称 q 是负定的 *(negative definite);*

(v) 如果 q 既不是半正定也不是半负定的, 则称 q 是不定的 *(indefinite).*

设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, q_A 是 $\mathbb{R}^n$ 上在标准基下矩阵为 A 的二次型. 如果 q_A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的), 则称 A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的).

命题 9.8 设 $\dim(V)=n$ 且 q 是 V 上的二次型. 它的签名是 (k,ℓ).

(i) q 是半正定的当且仅当 $\ell=0$;

(ii) q 是正定的当且仅当 $k=n$;

(iii) q 是半负定的当且仅当 $k=0$;

(iv) q 是负定的当且仅当 $\ell=n$;

(v) q 是不定的当且仅当 $k>0$ 且 $\ell>0$.

证明. 设 q 在规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的任意向量.

(i) 若 $\ell = 0$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq 0$. 即 q 半正定. 反之, 假设 $\ell > 0$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}$. 则 $q(\mathbf{x}) = -1 < 0$. 矛盾. 故 $\ell = 0$.

(ii) 若 $k = n$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. 于是, 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $q(\mathbf{x}) > 0$, 即 q 正定. 反之, 假设 $k < n$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$. 则 $q(\mathbf{e}_n) = 0$. 于是 q 不是正定的. 矛盾.

(iii) 与 (i) 类似.

(iv) 与 (ii) 类似.

(v) 排除 (i), (iii) 情形即可. □

注解 9.9 半正定, 正定, 半负定, 负定和不定二次型分别有下列规范型

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad -x_1^2 - \cdots - x_\ell^2, \quad -x_1^2 - \cdots - x_n^2,$$

和

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2,$$

在最后的规范型中 $k > 0, \ell > 0$.

类似地, 我们有

命题 9.10 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 它的签名是 (k, ℓ).

(i) A 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;

(ii) A 是正定的当且仅当 $k = n$;

(iii) A 是半负定的当且仅当 $k = 0$;

(iv) A 是负定的当且仅当 $\ell = n$;

(v) A 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

例 9.11 证明 $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ 是正定的当且仅当 $a > 0$. 判定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是不是正定的.

证明. 矩阵 (a) 对应 $\mathbb{R}$ 上的二次型 $q(x)=ax^2$. 而 q 正定当且仅当 $a>0$.

利用行列相伴变换或 *Jacobi* 公式可得

$$A\sim_c \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \Longrightarrow A \text{ 的签名是 } (1,1).$$

于是 A 是不定的.

例 9.12 设 $p,q\in\mathcal{Q}(V)$是半正定的. 证明 $p+q$ 也是半正定的; 若上述 p,q 中还有一个是正定的, 则 $p+q$ 也是正定的.

证明. 设 p,q 是半正定的. 则对任意的 $\mathbf{x}\in V$, $p(\mathbf{x})\geq 0$, $q(\mathbf{x})\geq 0$. 于是

$$(p+q)(\mathbf{x})=p(\mathbf{x})+q(\mathbf{x})\geq 0.$$

再设 p 是正定的. 则对于任意的 $\mathbf{x}\in V\setminus\{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{x})>0$. 于是

$$(p+q)(\mathbf{x})=p(\mathbf{x})+q(\mathbf{x})>0. \quad \square$$

类似地可证明下列结论.

注解 9.13 设 $A,B\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的, 则 $A+B$ 也是半正定的; 进一步设 A,B 中还有一个是正定的, 则 $A+B$ 也是正定的.

设 $q\in\mathcal{Q}(V)$. 定义

$$C_q=\{\mathbf{v}\in V\mid q(\mathbf{v})=0\}.$$

称 C_q 为 q 确定的锥面(cone).

例 9.14 设 $q\in\mathcal{Q}(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.

证明. 设 q 的签名是 (k,ℓ).

设 C_q 是 V 中的子空间. 如果 $k>0$ 且 $\ell>0$. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2+\cdots+x_{k+\ell}^2$, 其中 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_k\mathbf{e}_k+x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. 于是 $q(\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_{k+1})=1-1=0$ 且 $q(\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_{k+1})=0$. 由此可知

$$\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_{k+1},\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_{k+1}\in C_q \Longrightarrow 2\mathbf{e}_k\in C_q \Longrightarrow q(2\mathbf{e}_k)=0 \Longrightarrow 4=0.$$

矛盾. 于是 $k=0$ 或 $\ell=0$. 即 q 是半负定或半正定的.

反之, 不妨设 q 是半正定的. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2$. 设 $U=\langle\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n\rangle$. 则 $U\subset C_q$. 设 $\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+\cdots+v_n\mathbf{e}_n\in C_q$. 则

$$q(\mathbf{v})=v_1^2+\cdots+v_k^2=0.$$

因为 $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}$, 所以 $v_1=\cdots=v_k=0$. 于是 $\mathbf{v}=v_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}+\cdots+v_n\mathbf{e}_n\in U$, 即 $C_q\subset U$. 综上所述, $U=C_q$. $\square$

§9.3 （半）正定矩阵的等价条件

实数域的一个基本性质是：设 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. 则

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

这个性质的矩阵版如下: 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x}^t\mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

引理 9.15 *设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\mathrm{rank}(A^tA) = \mathrm{rank}(A)$.*

证明. 我们计算 $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$. 于是 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. 则 $\mathbf{x}^t(A^tA)\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{y} \geq 0$. A^tA 半正定.

设 U, V 是分别是以 A 和 A^tA 为系数的齐次线性方程组的解空间. 则 $U \subset V$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in V$. 则 $A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n$. 于是 $\mathbf{y}^t\mathbf{y} = 0$. 由此得出 $\mathbf{y} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbf{x} \in U$. 于是 $U = V$. 特别地, $\dim(U) = \dim(V)$. 由方程组版的对偶定理, $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^tA)$. □

定理 9.16 *设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则*

(i) A 半正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^tB$.

(ii) A 正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^tB$.

证明. (i) 设 A 半正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{rank}(A)$, 也是 A 的正惯性指数. 于是

$$A = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}}_{B} = B^tB.$$

反之, 根据引理 9.15, $A = B^tB$ 是半正定的.

(ii) 设 A 正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP = E_n.$$

于是, $A = \left(P^{-1}\right)^t P^{-1}$. 反之, 根据引理 9.15, $A = B^tB$ 是半正定的. 因为 B 可逆, 所以 A 满秩. 于是, A 的正惯性指数等于 n. □

例 9.17 设 A 是正定矩阵. 证明 $\det(A) > 0$ 且 A^{-1} 也正定.

证明. 由上述定理 *(ii)*, $A = P^tP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(P)^2 > 0$, 且

$$A^{-1} = (P^tP)^{-1} = P^{-1}\left(P^t\right)^{-1} = P^{-1}\left(P^{-1}\right)^t.$$

再由上述定理 *(ii)*, A^{-1} 正定. □

定理 9.18 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \ldots, n$. 则下列命题等价.

(i) A 正定;

(ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 B 是由 A 中第 $i_1, \ldots, i_k$ 行 和 $i_1, \ldots, i_k$ 列构成的子矩阵. 其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ}, $\ell = 1, 2, \ldots, k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^tA\mathbf{x} = \mathbf{y}^tB\mathbf{y}.$$

由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n. □

例 9.19 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det(A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 >$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

例 9.20 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 *9.18 (i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \le a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定*(*见例 *9.17)*. 于是 $\alpha \ge 0$. 由上式和归纳假设得

$$\det(A) = a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1} a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.21 *(Hadamard* 不等式*)* 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明*:*

$$|\det(A)| \le \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \quad 和 \quad |\det(A)| \le \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^tA$. 由定理 *9.16 (ii)* 可知 M 正定. 设 $M = (m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \le m_{1,1} \cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \le \prod_{i=1}^{n} m_{i,i} = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式. 令 $M = AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. □

§10 二次曲线和曲面的仿射分类(补充内容)

§10.1 仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 10.1 设 $\phi: V \longrightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{array}{rccc} \rho: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{array}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换 *(affine transformation)*, 其中 $\mathbf{v}$ 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (translation).

命题 10.2 *(i)* 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆, 且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 $\mathbf{v}_i$ 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma \circ \rho(\mathbf{x}) = \sigma(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \phi^{-1}(\mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho \circ \sigma(\mathbf{x}) = \rho(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) + \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{x}.$$

于是 $\rho^{-1} = \sigma$. □

注解 10.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 $\circ$ 构成群.

例 10.4 在这个例子中我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 在标准基下 $\mathbb{R}^n$ 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{array}$$

其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $v_1, \ldots, v_n$ 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆映射

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}. \end{array}$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数可以用下列交换图直观地表示

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}, \end{tikzcd}$$

其中 $g = f \circ T(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$. 我们对函数 g 的知识可以同构 $f = g \circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_1 \circ \cdots \circ T_k"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

引理 10.5 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二次型. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$\begin{array}{rccc} p \circ \rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 - \lambda x_{s+t+1} - \mu, \end{array}$$

其中 (k,ℓ) 是 h_2 的签名, $\lambda \in \{0,1\}$ 且 $\mu \in \mathbb{R}$.

证明. 设 $p = h_2 + h_1 + h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} + h_1(\mathbf{x}) + h_0,$$

其中 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t AP = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

. 设 $\rho_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p\circ\rho_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t P^t AP\mathbf{x} + h_1(P\mathbf{x}) + h_0 \overset{(1)}{=} x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 + 2\alpha_1 x_1 + \cdots + 2\alpha_n x_n + h_0,$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. (证明未完, 下周继续)