第二章 线性算子

§1 不同基底下线性映射的矩阵表示

在本节中 F 是任意域, V 和 W 是 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 是 W 的一组基.

§1.1 线性映射下的矩阵（复习和例子）

设 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$,

$$\phi(\mathbf{e}_j)=a_{1,j}\epsilon_1+\cdots+a_{m,j}\epsilon_m=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{m,j}\end{pmatrix},$$

$j=1,2,\ldots,n$. 称

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,n}\\ a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}$$

是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵(表示). 当 V 和 W 的基底选定后 ϕ 的矩阵是唯一的. 我们有

$$(\phi(\mathbf{e}_1),\ldots,\phi(\mathbf{e}_n))=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)A.$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\phi(\mathbf{x})=y_1\epsilon_1+\cdots+y_m\epsilon_m$. 则

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

例 1.1 设 $V=F^n$, $W=F^m$, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 都是标准基. 则 ϕ 的矩阵表示是

$$(\phi(\mathbf{e}_1),\ldots,\phi(\mathbf{e}_n)).$$

例 1.2 设 $\phi: V\longrightarrow W$ 由公式 $\forall\,\mathbf{x}\in V$, $\phi(\mathbf{x})=\mathbf{0}_W$ 给出. 则 ϕ 在 V 和 W 的任意基底下的矩阵都是 $O_{m\times n}$.

例 1.3 设 $\phi: V\longrightarrow V$ 由公式 $\forall\,\mathbf{x}\in V$, $\phi(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ 给出. 则 ϕ 在 V 的任意基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n;\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵都是 E_n.

例 1.4 设 V 是 W 的子空间, $\phi : V \longrightarrow W$ 由公式 $\forall\, \mathbf{x} \in V$, $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 给出. 取 W 的基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$. 则 ϕ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}.$$

例 1.5 线性空间 V 上的线性函数. 见第一章第三讲例 *5.6*.

例 1.6 设 $A \in F^{m\times n}$, $\phi : F^{n\times k} \longrightarrow F^{m\times k}$ 由公式 $\forall\, X \in F^{n\times k}$, $\phi(X) = AX$ 给出. 求 ϕ 在标准基下的矩阵.

解. 对 $j = 1, 2, \ldots, k$,

$$\overrightarrow{\phi(X)}^{(j)} = A\vec{X}^{(j)}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\phi(X)}^{(1)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\phi(X)}^{(k)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}_{km\times kn}}_{B} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 是 ϕ 在标准基下的矩阵. 此时标准基的顺序如下. 设 $E_{i.j} \in F^{n\times k}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$; $L_{i,j} \in F^{m\times k}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 分别是两个矩阵空间的标准基. 则 $F^{n\times k}$ 的标准基排列是

$$E_{1,1}, E_{2,1}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{1,k}, \ldots, E_{n,k}.$$

类似地, $F^{m\times k}$ 的标准基排列是

$$L_{1,1}, L_{2,1}, \ldots, L_{m,1}, \ldots, L_{1,k}, \ldots, L_{m,k}.$$

引理 1.7 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, $M \in F^{k\times \ell}$. 则定义

$$\phi(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = (\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k)).$$

则

$$\phi((\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)M) = (\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k))M.$$

证明. 设 $M = (m_{i,j})_{k\times \ell}$. 则

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)M = \left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\mathbf{v}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k} m_{i,\ell}\mathbf{v}_i \right).$$

于是

$$
\begin{aligned}
\phi((\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)M) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\mathbf{v}_i,\ \dots,\ \sum_{i=1}^{k} m_{i,\ell}\mathbf{v}_i\right)\\
&= \left(\phi\left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\mathbf{v}_i\right),\ \dots,\ \phi\left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,\ell}\mathbf{v}_i\right)\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{i,1}\phi(\mathbf{v}_i),\ \dots,\ \sum_{i=1}^{k} m_{i,\ell}\phi(\mathbf{v}_i)\right)\\
&= (\phi(\mathbf{v}_1),\dots,\phi(\mathbf{v}_k))M. \quad \square
\end{aligned}
$$

命题 1.8 设 $A \in F^{m\times n}$. 则存在唯一的 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 使得 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\dots,\epsilon_m$ 下的矩阵等于 A.

证明. 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 满足 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1,2,\dots,n$. 由线性映射基本定理 II 可知 ϕ 存在. 由矩阵表示的定义可知, A 是 ϕ 在选定基底下的矩阵. 映射 ϕ 的唯一性由线性映射基本定理 II 中的唯一性得出. $\square$

定理 1.9 设

$$
\begin{array}{rccl}
\Phi: & \mathrm{Hom}(V,W) & \longrightarrow & F^{m\times n} \\
 & \phi & \mapsto & A, \quad \phi \text{ 在选定基底下的矩阵}
\end{array}.
$$

则 Φ 是线性同构.

证明. 设 $\phi,\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $A = \Phi(\phi)$ 和 $B = \Phi(\psi)$. 再设 $\alpha,\beta \in F$. 对 $j = 1,2,\dots,n$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha\phi+\beta\psi)(\mathbf{e}_j) &= \alpha\phi(\mathbf{e}_j)+\beta\psi(\mathbf{e}_j) = \alpha(\epsilon_1,\dots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)} + \beta(\epsilon_1,\dots\epsilon_m)\vec{B}^{(j)}\\
&= (\epsilon_1,\dots\epsilon_m)(\alpha\vec{A}^{(j)}+\beta\vec{B}^{(j)}) = (\epsilon_1,\dots\epsilon_m)\vec{C}^{(j)}, \quad \text{其中 } C = \alpha A+\beta B.
\end{aligned}
$$

于是, $\Phi(\alpha\phi+\beta\psi) = C = \alpha A+\beta B = \alpha\Phi(\phi)+\beta\Phi(\psi)$. 映射 Φ 是线性的.

设

$$
\begin{array}{rccl}
\Theta: & F^{m\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W) \\
 & A & \mapsto & \phi, \quad \phi \text{ 由命题 1.8 的证明中定义}
\end{array}.
$$

根据线性映射基本定理 II 和 命题 1.8, $\Theta\circ\Phi(\phi) = \phi$ 且 $\Phi\circ\Theta(A) = A$. 验证如下. 设 $A = \Phi(\phi)$. 则 $\Theta(A)(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1,\dots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$. 于是, $\Theta(A)(\mathbf{e}_j) = \phi(\mathbf{e}_j)$, $j = 1,2,\dots,n$. 由线性映射基本定理 II 可知, $\Theta(A) = \phi$. 反之, 设 $\phi = \Theta(A)$. 则 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1,\dots\epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1,2\dots,n$. 于是 $\Phi(\phi) = A$. $\square$

命题 1.10 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵是 A. 设 Z 是 F 上的线性空间 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是 Z 的一组基, $\psi \in \mathrm{Hom}(W,Z)$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m;\delta_1,\ldots,\delta_k$ 下的矩阵是 $B \in F^{k\times m}$. 则 $\psi\circ\phi \in \mathrm{Hom}(V,Z)$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n;\delta_1,\ldots,\delta_k$ 下的矩阵是 $BA \in F^{k\times n}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

证明. 关于 $\psi\circ\phi$ 是线性映射的验证见上学期第二章命题 4.1. 计算

$$\psi\circ\phi(\mathbf{e}_j) = (\psi(\epsilon_1),\ldots,\psi(\epsilon_n))\vec{A}^{(j)} = (\delta_1,\ldots,\delta_k)B\vec{A}^{(j)},$$

$j = 1,2,\ldots,n$. 于是

$$(\psi\circ\phi(\mathbf{e}_1),\ldots,\psi\circ\phi(\mathbf{e}_n)) = (\delta_1,\ldots,\delta_k)B(\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}) = (\delta_1,\ldots,\delta_k)BA.$$

映射 $\psi\circ\phi$ 在选定基底下的矩阵是 BA. □

§1.2 线性映射在不同基底下的矩阵

定理 1.11 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$. 再设 $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n$ 是 V 的另一组基, $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 是 W 的另一组基, 且

$$(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P \quad 和 \quad (\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_m) = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)Q,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $Q \in \mathrm{GL}_m(F)$. 如果 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m$ 下的矩阵是 A, 则 ϕ 在 $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n;\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_m$ 下的矩阵是 $Q^{-1}AP$.

证明. 由 $(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$ 和引理 1.7 得

$$(\phi(\mathbf{e}'_1),\,\ldots,\,\phi(\mathbf{e}'_n)) = (\phi(\mathbf{e}_1),\,\ldots,\,\phi(\mathbf{e}_n))P.$$

于是

$$(\phi(\mathbf{e}'_1),\,\ldots,\,\phi(\mathbf{e}'_n)) = (\epsilon_1,\,\ldots,\,\epsilon_m)AP = (\epsilon'_1,\,\ldots,\,\epsilon'_m)Q^{-1}AP. \quad \square$$

上述定理说明线性映射在不同基底下的矩阵有相同的秩.

定义 1.12 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V,W)$, A 是 ϕ 在 V 的一组基和 W 的一组基下的矩阵. 则 $\mathrm{rank}(A)$ 称为 ϕ 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(\phi)$.

例 1.13 计算例 *1.6* 中 ϕ 的秩. 设矩阵 B 由例 *1.6* 给出. 则

$$\mathrm{rank}(\phi) = \mathrm{rank}(B) = k\mathrm{rank}(A).$$

推论 1.14 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 且 $\mathrm{rank}(\phi) = r$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 和 W 的一组基 $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m$ 使得在该基下 ϕ 的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

且 $r = \dim(\mathrm{im}(\phi))$.

证明. 设 $d = \ker(\phi)$, $\mathbf{e}'_{n-d+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 把它扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{n-d}, \mathbf{e}'_{n-d+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n.$$

因为 $\mathrm{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_n) \rangle$ 且 $\phi(\mathbf{e}'_{n-d+1}) = \cdots = \phi(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{0}_W$, 所以

$$\mathrm{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}'_{n-d}) \rangle.$$

因为 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n - d$, 所以 $\epsilon'_1 = \phi(\mathbf{e}'_1), \ldots, \epsilon'_{n-d} = \phi(\mathbf{e}'_{n-d})$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基. 将其扩充为 W 的一组基

$$\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{n-d}, \epsilon'_{n-d+1}, \ldots, \epsilon'_m.$$

则 ϕ 在上述基底下的矩阵等于 M. 特别地, $r = n - d$. □

例 1.15 设 $A \in F^{m\times n}$. 证明存在矩阵 $L \in \mathrm{GL}_m(F)$ 和 $R \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$LAR = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

证明. 根据命题 *1.8*, 可设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 使得 A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵等于 A. 由推论 *1.14*, 存在 V 的一组基 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 和 W 的一组基 $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m$ 使得在该基下 ϕ 的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

设 $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)P$ 和 $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)Q$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $Q \in \mathrm{GL}_m(F)$. 根据定理 *1.11*, $M = Q^{-1}AP$. □

注解 1.16 根据推论 *1.14*, 第一章第二讲命题 *4.15 (iii)* 可写为

$$\dim(\ker(\phi)) + \mathrm{rank}(\phi) = \dim(V).$$

例 1.17 设 $\phi : F^{m\times n} \longrightarrow F^{n\times m}$ 由公式 $\phi(X) = X^t$ 给出. 求 $\mathrm{rank}(\phi)$.
解. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 于是 $\mathrm{rank}(\phi) = mn$.

推论 1.18 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

(i) ϕ 是单射当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(V)$;

(ii) ϕ 是满射当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(W)$.

(iii) 如果 ϕ 是双射, 则 $\dim(V) = \dim(W)$.

证明. (i) ϕ 单当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$ (第一章第一讲命题 2.3) 当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(V)$ (上述注释).

(ii) ϕ 满当且仅当 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(W)$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = \dim(W)$ (推论 1.14).

(iii) 由 (i) 和 (ii) 可知, $\dim(V) = \mathrm{rank}(\phi)$ 且 $\dim(W) = \mathrm{rank}(\phi)$. □

推论 1.19 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 且 $\dim(V) = \dim(W)$. 则以下断言等价

(i) ϕ 是单射;

(ii) ϕ 是满射;

(iii) ϕ 是双射.

证明. 设 $n = \dim(V)$, $r = \mathrm{rank}(\phi)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). 由上述推论 (i), $r = n$. 于是 $r = \dim(W)$. 从而, ϕ 是满射(上述推论 (ii)).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 由上述推论 (ii), $r = n$. 于是 $r = \dim(V)$. 从而, ϕ 是单射(上述推论 (i)), 即 ϕ 是双射.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 显然. □

推论 1.20 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵. 则

(i) ϕ 是单射当且仅当 A 列满秩, 即 $\mathrm{rank}(A) = n$;

(ii) ϕ 是满射当且仅当 A 行满秩, 即 $\mathrm{rank}(A) = m$.

(iii) ϕ 是双射, 则 A 是可逆方阵.

证明. 注意到 $A \in F^{m \times n}$.

(i) ϕ 单当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = n$, 即 $\mathrm{rank}(A) = n$. (推论 1.18 (i))

(ii) ϕ 满当且仅当 $\mathrm{rank}(\phi) = m$, 即 $\mathrm{rank}(A) = m$. (推论 1.18 (ii))

(iii) 由 (i) 和 (ii) 直接得出. □

例 1.21 设 $A \in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r > 0$. 则存在列满秩矩阵 $L \in F^{m\times r}$ 和行满秩矩阵 $R \in F^{r\times n}$ 使得 $A = LR$.

证明. 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 在 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵等于 A. 则 $\mathrm{rank}(\phi) = r$. 于是 $\ker(\phi)$ 的维数是 $n - r$. *(见注释 1.16.)* 从而 $V/\ker(\phi)$ 的维数等于 r. *(见第一章第二讲引理 4.14.)* 由线性映射基本定理 I 可知, $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, 其中 $\pi : V \longrightarrow V/\ker(\phi)$ 是线性满射, $\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 是线性单射. 设 $\delta_1, \ldots, \delta_r$ 是 $V/\ker(\phi)$ 一组基, R 是 π 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \ldots, \delta_r$ 下的矩阵, L 是 $\bar{\phi}$ 在 $\delta_1, \ldots, \delta_r; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵. 则 $A = LR$ *(命题 1.10)*, 且 L 列满秩, R 行满秩. □

上述结果曾在上学期用矩阵打洞技术证明(见上学期第二章第六讲第七页).

§1.3 对偶映射

设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则

$$\begin{array}{rccc} \phi^* : & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & f & \mapsto & f \circ \phi \end{array}$$

是从 W^* 到 V^* 的映射.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

引理 1.22 设 $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\sigma \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $\tau \in \mathrm{Hom}(W, Z)$, $a \in F$. 则

$$(\phi + \psi) \circ \sigma = \phi \circ \sigma + \psi \circ \sigma, \quad \tau \circ (\phi + \psi) = \tau \circ \phi + \tau \circ \psi, \quad (a\phi) \circ \sigma = \phi \circ (a\sigma) = a(\phi \circ \sigma).$$

证明. 设 $\mathbf{u} \in U$. 则

$$(\phi + \psi) \circ \sigma(\mathbf{u}) = (\phi + \psi)(\sigma(\mathbf{u})) = \phi(\sigma(\mathbf{u})) + \psi(\sigma(\mathbf{u})) = \phi \circ \sigma(\mathbf{u}) + \psi \circ \sigma(\mathbf{u}).$$

由 $\mathbf{u}$ 的任意性可知 $(\phi + \psi) \circ \sigma = \phi \circ \sigma + \psi \circ \sigma$. 类似可证 $\tau \circ (\phi + \psi) = \tau \circ \phi + \tau \circ \psi$.

$$(a\phi) \circ \sigma(\mathbf{u}) = (a\phi)(\sigma(\mathbf{u})) = a\phi(\sigma(\mathbf{u})) = a\phi \circ \sigma(\mathbf{u}),$$

且

$$\phi \circ (a\sigma(\mathbf{u})) = \phi(a\sigma(\mathbf{u})) = a\phi(\sigma(\mathbf{u}) = a\phi \circ \sigma(\mathbf{u}).$$

于是, $(a\phi) \circ \sigma = \phi \circ (a\sigma) = a(\phi \circ \sigma)$. □

下面我们来验证 $\phi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in W^*$.

$$\phi^*(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ \phi = \alpha f \circ \phi + \beta g \circ \phi = \alpha\phi^*(f) + \beta\phi^*(g).$$

验证完毕. 我们称 ϕ^* 是 ϕ 的对偶映射.

命题 1.23 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵为 $A = (a_{i,j})_{m\times n}$. 则对偶映射 ϕ^* 在对偶基 $\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵是 A^t.

证明. 我们先计算 $\phi^*(\epsilon_i^*)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵, $i = 1, 2, \ldots, m$. 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{e}_j) = \epsilon_i^*(\phi(\mathbf{e}_j)) = \epsilon_i^*(a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m) = a_{i,j}.$$

则对于 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$,

$$\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{x}) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = a_{i,1}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*(\mathbf{x}) = (a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*)(\mathbf{x}).$$

于是,

$$\phi^*(\epsilon_i^*) = a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^* = (\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)\begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)\vec{A^t}^{(i)}.$$

由此得出 A^t 是 ϕ^* 在 $\epsilon_1^*, \ldots, \epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵. □

该命题的一个直接推论是 ϕ 和 ϕ^* 的秩相等.

§2 线性算子代数和矩阵相似

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 集合 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 记为 $\mathcal{L}(V)$, 其中的元素称为*线性算子*. 线性算子通常用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots,$ 表示. 特别地 $\mathcal{O}$ 代表 V 上的零算子(映射), $\mathcal{E}$ 代表 V 上的恒等算子(映射).

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵，简称 $\mathcal{A}$ 为在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵.

§2.1 线性算子代数

我们已经知道 $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \text{数乘})$ 是 F 上的线性空间. 注意到任何两个 V 上的线性算子都可以复合, 且对任意 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$,

$$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} \quad \text{和} \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

在由引理 1.22 可知, $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \circ, \mathcal{E})$ 是一个环. 此外对任意 $\alpha \in F$,

$$\alpha(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\alpha\mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha\mathcal{B}).$$

这个性质使得我们称 $\mathcal{L}(V)$ 是 F 上的一个*代数*.

定理 2.1 设

$$\begin{array}{rcll} \Phi: \ \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(F) & \\ \mathcal{A} & \mapsto & A, & \mathcal{A} \text{ 在 } \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \text{ 下的矩阵} \end{array}$$

则 Φ 既是线性同构又是环同构(此时称 Φ 是代数同构).

证明. 根据定理 1.9, Φ 是线性同构. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, 它们在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 A, B. 根据命题 1.10, $\Phi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = AB = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$. 可直接验证 $\Phi(\mathcal{E}) = E_n$. □.

为了简洁, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ 也写成 $\mathcal{AB}$. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}$ 可逆, 则称 $\mathcal{A}$ 是可逆算子. 如果存在 $\lambda \in F$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是数乘算子. 此时 $\mathcal{A} = \lambda \mathcal{E}$. 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是幂零算子. 如果 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是幂等算子.

由上述定理可知, $\mathcal{A}$ 是可逆(数乘, 幂零, 幂等)算子当且仅当 $\Phi(\mathcal{A})$ 是(数乘, 幂零, 幂等)矩阵.

例 2.2 设 $\mathcal{D} : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ 由公式 $\mathcal{D}(f) = f'$ 定义. 则 $\mathcal{D}^n = \mathcal{O}$. 该算子在 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵见第一章第三讲例 *5.17*.

例 2.3 设 U_1, U_2 是 V 的子空间满足 $V = U_1 \oplus U_2$. 设 π_i 是 V 关于上述直和到 U_i 的投影, $i = 1, 2$. 因为关于直和的投影具有等方性(见第一章第七讲命题 *12,2(ii)*), 所以 π_1 和 π_2 都是幂等的. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 U_1 的基, $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 U_2 的基. 则 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的基. 在该基下 π_1 和 π_2 的矩阵分别是.

$$\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}.$$

§2.2 矩阵的相似

设 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的另一组基, 且 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 设算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A. 根据定理 1.11, $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵等于 $P^{-1}AP$. 我们的问题是如果选取 V 的一组基使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵尽可能简单(零元素尽可能多,非零元出现的尽可能有规律).

定义 2.4 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 相似. 记为 $B \sim_s A$.

验证相似是等价关系如下. 对任意 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $A = E^{-1}AE$. 于是 $A \sim_s A$. 自反性成立. 设 $B \sim_s A$. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是 $A = PBP^{-1}$, $A \sim_s B$. 对称性成立. 设 $A \sim_s B$, $B \sim_s C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BC$. 于是 $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, 即 $A \sim_s C$. 传递性成立.

两个矩阵相似当且仅当它们是同一个线性映射在不同基底下的矩阵. 于是我们的问题也可等价地叙述为给定矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 研究并计算与 A 相似的尽可能简单的矩阵.

命题 2.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果 $A \sim_s B$, 则

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B), \quad \det(A) = \det(B), \quad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B).$$

证明. 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 因为乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 所以 $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A)$. 由行列式乘法定理可知, $\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$.

为了证明 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. 我们先来证明迹是交换不变量, 即对任意 $M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(F)$, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$. 为此, 设 $L = (\ell_{i,j}), R = (r_{i,j})$ 使得 $L = MN$, $R = NM$. 则对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$\ell_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} n_{j,i}, \quad r_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} n_{j,i} m_{i,j}.$$

于是

$$\mathrm{tr}(L) == \sum_{i=1}^{n} \ell_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} n_{j,i} \quad \mathrm{tr}(R) = \sum_{j=1}^{n} r_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{j,i} m_{i,j}.$$

由此可知 $\mathrm{tr}(L) = \mathrm{tr}(R)$, 即迹是交换不变量.

我们由 $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{tr}(A)$. □

例 2.6 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \nsim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 因为这两个矩阵的迹不同, 所以它们不相似.

例 2.7 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

问 A 和 B 是否相似?

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_2(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 则 $PB = AP$, 即 $P(E + C) = P$. 其中

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $PC = O$. 因为 P 可逆, 所以 $C = O$. 矛盾. 这两个矩阵不相似. □