第二章 线性算子

§1 不同基底下线性映射的矩阵表示

§2 线性算子代数和矩阵相似

§3 单个算子生成的子环

§4 算子和矩阵的极小多项式

§5 $F[t]$ 中的最小公倍式*(复习与加细)*

§6 商算子

§7 不可分子空间

§8 特征向量和特征多项式

§9 对角化

§10 循环子空间

§11 广义特征子空间(根子空间)

定义 11.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解, 即 $p_1, \ldots, p_s$ 是 $F[t] \setminus F$ 中两两互素的不可约(首一)多项式, $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}^+$. 对 $i = 1, 2, \ldots, s$, 令

$$V(p_i) = \ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A})).$$

称 $V(p_i)$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 p_i 的广义特征子空间.

注解 11.2 *由第二章第二讲命题 6.5, $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间都是 $\mathcal{A}$-不变的.*

引理 11.3 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $p, q \in F[t]$ 互素. 则 $p(\mathcal{A})$ 是 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的可逆算子.*

证明. 因为 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第二讲命题 6.5), 所以它也是 $p(\mathcal{A})$-不变的(第二章第二次习题课例 3.2). 于是, $p(\mathcal{A})$ 可以看做 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的线性算子.

因为 p,q 互素, 所以存在 $f,g\in F[t]$ 使得 $f(t)p(t)+g(t)q(t)=1$. 于是,

$$f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})+g(\mathcal{A})q(\mathcal{A})=\mathcal{E}.$$

设 $\mathbf{x}\in\ker(q(\mathcal{A}))$ 使得 $p(\mathcal{A})(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 把上式两边作用于 $\mathbf{x}$ 得

$$f(\mathcal{A})(p(\mathcal{A})(\mathbf{x}))+g(\mathcal{A})(q(\mathcal{A})(\mathbf{x}))=\mathcal{E}(\mathbf{x})=\mathbf{x}.$$

因为 $p(\mathcal{A})(\mathbf{x})=q(\mathcal{A})(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 所以上式蕴含 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 于是 $p(\mathcal{A})$ 作为 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上得限制算子得核是平凡的. 故它在 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的可逆算子(第二章第一讲推论 1.19). □

定理 11.4 *(广义特征子空间分解–极小多项式版)* *设* $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$ *是* $\mu_{\mathcal{A}}$ *在* $F[t]$ *中的不可约分解. 则以下结论成立:*

(i) $V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_s)$.

(ii) *设* $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{V(p_i)}$. *则* $\mu_{\mathcal{A}_i}=p_i^{m_i}$, $i=1,2,\ldots,s$.

(iii) *对任意* $i\in\{1,\ldots,s\}$, $p_i(\mathcal{A})$ *是* $V(p_1)+\cdots+V(p_{i-1})+V(p_{i+1})+\cdots+V(p_s)$ *上的可逆算子.*

证明. (i) 和 (ii) 是扩展的核核分解定理的内容(第二章第二次习题课定理 4.3).

(iii) 不妨设 $i=1$. 因为 p_1 和 $p_j^{m_j}$ 互素, $j=2,\ldots,m$. 由引理 11.3, $p_1(\mathcal{A})$ 在 $V(p_j)$ 上是可逆算子. 设 $\mathbf{x}\in V(p_2)+\cdots+V(p_s)$. 则存在 $\mathbf{x}_j\in V(p_j)$, $j=2,\ldots,m$, 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_s$. 于是

$$p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x})=p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_2)+\cdots+p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_s).$$

如果 $p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 则 $p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_2)+\cdots+p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_s)=\mathbf{0}$. 因为 $p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_j)\in V(p_j)$ 且 $V(p_2)+\cdots+V(p_s)$ 是直和, 所以 $p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_2)=\cdots=p_1(\mathcal{A})(\mathbf{x}_s)=\mathbf{0}$. (见第一章第一讲定理 1.12 (ii)). 根据引理 11.3, $\mathbf{x}_2=\cdots=\mathbf{x}_s=\mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 由此可知 $p_1(\mathcal{A})$ 在 $V(p_2)+\cdots+V(p_s)$ 上是可逆的(第二章第一讲推论 1.19). □

例 11.5 设

$$A=\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix},\quad \text{其中 } B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ 和 } C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

把 A 看成 $\mathbb{R}^2$ 上的线性算子, 即在标准基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 下矩阵为 A 得线性算子. 计算 A 的广义特征子空间分解.

解. 直接计算得 $\mu_B = t^2$ 和 $\mu_C = (t-1)^2$. 于是, $\mu_A = \operatorname{lcm}(\mu_B, \mu_C) = t^2(t-1)^2$. 设 $p_1 = t$ 和 $p_2 = t-1$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $V(t) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $V(t-1) = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$. 从而

$$V = V(t) \oplus V(t-1) = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle.$$

例 11.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是可对角化的. 验证 V 关于 $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间分解就是 V 关于 $\mathcal{A}$ 的特征子空间分解.

证明. 由对角化判别法 V 可知, $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ 两两不同. 由第二章第四讲推论 *10.12*, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 组成了 A 的谱.

$$V(t-\lambda_i) = \ker(A - \lambda_i E) = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}\} = V^{\lambda_i},$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 于是,

$$V = V(t-\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(t-\lambda_k) = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}. \quad \square$$

命题 11.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, p 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t] \setminus F$ 中的一个 m 重因子. 证明*:*

(i) 对任意 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\ker(p^k(\mathcal{A})) \subsetneqq V(p)$*;* 特别地, $V(p) \neq \{\mathbf{0}\}$.

(ii) 对任意 $k > m$, $\ker(p^k(\mathcal{A})) = V(p)$.

证明. 由第二章第二次作业可知

$$\ker(p(\mathcal{A})^0) \subset \ker(p(\mathcal{A})) \subset \ker(p(\mathcal{A})^2) \subset \cdots. \tag{1}$$

设 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解, $p = p_1$ 和 $m = m_1$.

(i) 根据 (1), 我们只要证 $\ker(p_1^k(\mathcal{A})) \neq V(p_1)$. 注意到 $p_1^k(\mathcal{A})$ 在 $\ker(p_1^k(\mathcal{A}))$ 是零算子故 $\mathcal{A}$ 做为 $\ker(p_1^k(\mathcal{A}))$ 上的限制算子的极小多项式等于 p_1^{ℓ}, 其中 $\ell \leq k$ (第二章第四讲引

理 4.2). 由定理 11.4, $\mathcal{A}$ 作为在 $V(p_1)$ 的限制算子的极小多项式等于 $p_1^{m_1}$. 而 $m_1 > \ell$. 于是, $\ker(p^k(\mathcal{A})) \neq V(p)$.

当取 $k=0$ 时, 我们有 $\ker(p_1^0(\mathcal{A})) = \{\mathbf{0}\} \subsetneqq V(p_1)$. 故 $V(p_1)$ 非平凡.

(ii) 根据 (1), 我们只要证 $\ker(p_1^k(\mathcal{A})) \subset V(p_1)$. 设 $\mathbf{x} \in \ker(p_1^k(\mathcal{A}))$. 根据定理 11.4, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_s$, 其中 $\mathbf{x}_i \in V(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 于是

$$\mathbf{0} = p_1^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p_1^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}_1) + \cdots + p_1^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}_s).$$

因为广义特征子空间分解是直和, $p_1^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots s$ (第一章第一讲定理 1.12 (ii)). 由定理 11.4 (iii) 中结论得出 $\mathbf{x}_2 = \cdots = \mathbf{x}_s = \mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \in V(p_1)$. □

例 11.8 设

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & B \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

把 A 看成 $\mathbb{R}^2$ 上的线性算子, 即在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 下矩阵为 A 得线性算子. 计算 A 的广义特征子空间分解.

解. *直接计算得 $\mu_B = t^2$. 于是, $\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_B, \mu_B) = t^2$. 由定理 11.4 可知, $V = V(t)$.* □

§12 循环子空间分解

定理 12.1 *(循环子空间分解) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得*

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell).$$

证明. 设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对小于 n 的任何线性空间成立.

考虑 n 维情形. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环的, 取 $\ell = 1$ 即可. 否则, 存在 $\mathbf{w} \in V$ 使得 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 在所有 $\mathcal{A}$ 循环子空间中维数最大. 设该维数等于 m. 则 $0 < m < n$. 我们将构造一个 $\mathcal{A}$-子空间 W 使得 $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$. 然后把归纳假设用到 W 上即可.

把 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 的基底 $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})$ 扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}), \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n.$$

由线性映射基本定理 II, 存在唯一的线性函数 $f \in V^*$ 满足

$$f(\mathcal{A}^i(\mathbf{w})) = 0, \ i = 0, 1, \ldots, m-2, \quad f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) = 1, \quad f(\epsilon_j) = 0, \ j = m+1, \ldots, n.$$

设 $f_k = f \circ \mathcal{A}^k, k = 0, 1, \ldots, m-1,$

$$W = \cap_{k=0}^{m-1} \ker(f_i).$$

我们来验证以下三个断言.

(i) $\dim(W) = n - m$;

(ii) $(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W = \{\mathbf{0}\}$;

(iii) W 是 $\mathcal{A}$-不变的.

断言 (i) 和 (ii) 保证 $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$. 而断言 (iii) 保证归纳假设可以应用到 W 上.

验证断言(i). 我们首先看 $\mathcal{A}$ 在基底

$$\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n \tag{2}$$

下的矩阵. 我们有

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}), \mathcal{A}^2(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^m(\mathbf{w}), \mathcal{A}(\epsilon_{m+1}), \ldots, \mathcal{A}(\epsilon_n)) = (\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \ldots, \epsilon_n)$$

$$\begin{array}{c@{\quad}c}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ m \to \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & *
\end{array}\right)_{n\times n} \\
 & \begin{array}{cccccccc} & & & & \uparrow & & & \\ & & & & m & & & \end{array}
\end{array}$$

. 设上述矩阵等于 A. 线性函数 f 在基底 (2) 下的矩阵是

$$B = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, 1, \underbrace{0, \ldots 0}_{n-m}).$$

而 f_k 在基底 (2) 下的矩阵是

$$BA^k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k-1}, 1, \underbrace{*, \ldots *}_{n-m+k}),$$

$k = 0, 1, \ldots, m-1$. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在基底 (2) 下的的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} f_0(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{m-1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ BA \\ \vdots \\ BA^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m\times n}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

于是, $\cap_{i=0}^{m-1}\ker(f_i)$ 的维数等于以 C 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数, 即 $n-\operatorname{rank}(C)=n-m$.

验证断言(ii). 设 $\mathbf{x}\in(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\cap W$ 且 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. 则存在 $p\in\{0,1,\dots,m-1\}$, $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_p\in F$, $\alpha_p\neq 0$, 使得

$$\mathbf{x}=\alpha_0\mathbf{w}+\alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{w})+\cdots+\alpha_p\mathcal{A}^p(\mathbf{w}).$$

则

$$\begin{aligned}0&=f_{m-1-p}(\mathbf{x})\\&=\alpha_0 f_{m-1-p}(\mathbf{w})+\alpha_1 f_{m-1-p}(\mathcal{A}(\mathbf{w}))+\cdots+\alpha_p f_{m-1-p}(\mathcal{A}^p(\mathbf{w})) && (f_{m-1-p}\text{ 线性})\\&=\alpha_0 f(\mathcal{A}^{m-1-p}(\mathbf{w}))+\alpha_1 f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{m-p}(\mathbf{w}))+\cdots+\alpha_p f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) && (f_0,\dots,f_p\text{ 和 }\mathbf{w}\text{ 的定义})\\&=\alpha_p.\end{aligned}$$

矛盾. 断言 (ii) 成立.

验证断言(iii). 设 $\mathbf{x}\in W$. 则对任意 $k\in\{0,1,\dots,m-1\}$, $f_k(\mathbf{x})=f(\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))=0$. 设 $\mathbf{y}=\mathcal{A}(\mathbf{x})$. 则对任意 $k\in\{0,1,\dots,m-2\}$, $f_k(\mathbf{y})=f_{k+1}(\mathbf{x})=0$.

还需要验证 $f_{m-1}(\mathbf{y})=0$. 由 m 的极大性可知, $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{x})\le m$. 根据第二章第四讲命题 10.2 (iii), 存在 $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{m-1}\in F$, 使得

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{x})=\beta_0\mathbf{x}+\beta_1\mathcal{A}(\mathbf{x})+\cdots+\beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x}).$$

于是

$$\begin{aligned}f_{m-1}(\mathbf{y})&=f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{y})) && (f_{m-1}\text{ 的定义})\\&=f(\mathcal{A}^m(\mathbf{x})) && (\mathbf{y}\text{ 的定义})\\&=f(\beta_0\mathbf{x}+\beta_1\mathcal{A}(\mathbf{x})+\cdots+\beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) && (\text{见上式})\\&=\beta_0 f(\mathbf{x})+\beta_1 f(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\cdots+\beta_{m-1}f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) && (f\text{ 线性})\\&=\beta_0 f_0(\mathbf{x})+\beta_1 f_1(\mathbf{x})+\cdots+\beta_{m-1}f_{m-1}(\mathbf{x}) && (f_0,f_1,\dots,f_{m-1}\text{ 的定义})\\&=0. && (\mathbf{x}\in W)\end{aligned}$$

于是 $\mathbf{y}\in W$. 断言 (iii) 成立. □

注解 12.2 我们解释上述证明中线性函数 f 的来源. 记 $U=F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$. 设证明中矩阵 A 中前 m 行和前 m 列构成的子矩阵是 M. 则

$$A=\begin{pmatrix}M & \star\\ O_{(n-m)\times m} & \star\end{pmatrix},$$

其中 $\star$ 部分我们并不关心. 注意到 M 是 A_U 在基底 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, A^{m-1}(\mathbf{v})$ 下的矩阵. 因为 U 是 $\mathcal{A}_U$-循环的, 所以 $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 的次数等于 m (第二章第三讲定理 10.7). 于是, μ_M 的次数也等于 m (第二章第四讲定理 10.7).

对偶算子 $\mathcal{A}^*$ 在 (2) 的对偶基下的矩阵是

$$A^t = \begin{pmatrix} M^t & O_{m\times(n-m)} \\ \star^t & \star^t \end{pmatrix}.$$

(见第二章第一讲命题 1.23). 于是, 商算子 $\bar{A}^* \in \mathcal{L}(V^*/U^0)$ 的矩阵是 M^t (见第二章第三讲命题 6.1). 因为 μ_M 的次数也等于 m, 所以 μ_{M^t} 的次数等于 m (容易证明 $\mu_M = \mu_{M^t}$). 由此得出, V^*/U^0 是 $\bar{A}^*$-循环的(子空间 U^0 的定义见第一章第三讲习题 6). 设 $g+U^0$ 是 V^*/U^0 中关于 $\bar{A}^*$ 的循环向量, 其中 $g \in V^*$. 事实上, 任何 g 都可以用来建立上述三个断言. 但证明中的 f 是最简单的一个关于 $\bar{A}^*$ 的循环向量.

定理 12.3 *(Hamilton-Cayley 定理的加强版)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) 每个 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell,$$

其中 $U_1, \ldots, U_\ell$ 是非零的 $\mathcal{A}$-循环子空间. 特别地, $U_1, \ldots, U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第四讲命题 10.2 (ii)). 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{U_i}$, $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $\chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$. 根据第二章第二讲定理 6.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{pmatrix}.$$

由第二章第二讲定理 6.9,

$$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell).$$

由第二章第三讲例 8.15,

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_\ell.$$

由第二章第四讲引理 10.10, $\mu_i = \chi_i$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$. 故上式可以写为:

$$\chi_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\ell.$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$. (i) 成立. 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子. 则 p 整除某个 μ_i (见上学期第五章第二讲引理 3.1). 由此可知, $p|\mu_{\mathcal{A}}$ □

注解 12.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$$

是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1 \le n_1, \ldots, m_s \le n_s$ 且 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

推论 12.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

(i) $\mu_A(t)|\chi_A(t)$;

(ii) 每个 $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

例 12.6 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}.$$

则 $\mu_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{B}} = t^2$ 且 $\chi_A = \chi_B = t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B. 注意到 $\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(B)$. 于是, $A \nsim_s B$.

定理 12.7 *(广义特征子空间分解–特征多项式版)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则以下结论成立:

(i) $V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$.

(ii) 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V(p_i)}$. 则 $\chi_{\mathcal{A}_i} = p_i^{n_i}$, 特别地 $\dim(V(p_i)) = n_i \deg(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

(iii) 对任意 $i \in \{1, \ldots, s\}$, $p_i(\mathcal{A})$ 是 $V(p_1) + \cdots + V(p_{i-1}) + V(p_{i+1}) + \cdots + V(p_s)$ 上的可逆算子.

证明. 由定理 12.3, $p_1, \ldots, p_s$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中所有的两两互素的(首一)不可约因子. 根据定理 11.4 (i) 和 (iii), (i) 和 (iii) 成立. 根据定理 11.4 (ii), $\mu_{\mathcal{A}_i}$ 是 p_i 的某个幂次. 于是, $\chi_{\mathcal{A}_i} = p_i^{k_i}$, 其中 $k_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 因为

$$\chi_A(t) = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$$

见第二章第三讲例 8.15). 由多项式不可约因子分解的唯一性, $k_i = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 根据第二章第三讲注释 8.8, $\dim(V(p_i)) = n_i \deg(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. □

引理 12.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当下述两个条件都成立.

(i) U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间;

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次.

证明. 设 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 根据定理 12.1, U 是若干 A_U-循环子空间的直和, 也是若干 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 $\mathcal{A}$-循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由定理 11.4 可知, U 关于 $\mathcal{A}_U$ 的广义特征子空间分解的直和项不止一个, 与 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{A_U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间, 所以 U 是 $\mathcal{A}_U$-循环空间. 由第二章第四讲引理 10.10, $\dim(U) = m\deg(p)$. 假设 $U = U_1 \oplus U_2$, 其中 U_1, U_2 是正维数的 $\mathcal{A}$-子空间. 则它们也是 $\mathcal{A}_U$ 子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} | p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}} | p^m$ (第二章第二讲命题 6.3). 但

$$p^m = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$$

(第二章第二讲引理 6.7). 于是, $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}}$ 至少有一个等于 p^m. 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} = p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}$ 有因子 p^k, 其中 $k \geq m$. 于是,

$$\dim(U_1) \geq m\deg(p) = \dim(U).$$

矛盾. □