第十五周讲义从第五页开始

第二章 线性算子

§1 不同基底下线性映射的矩阵表示

§2 线性算子代数和矩阵相似

§3 单个算子生成的子环

§4 算子和矩阵的极小多项式

§5 $F[t]$ 中的最小公倍式*(复习与加细)*

§6 商算子

§7 不可分子空间

§8 特征向量和特征多项式

§9 对角化

§10 循环子空间

§11 广义特征子空间(根子空间)

§12 循环子空间分解

§13 复数域上的 Jordan 标准型（存在性）

§14 初等因子组

记号*:* 除非特别说明*,* 在本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间*,* 其中 F 是任意域*.*

重集 是指中的元素可以重复出现的集合.

例 14.1 设 $S=\{a,a,b\}$ 和 $T=\{a,b\}$. 它们作为重集不相等. 元素 a 在 S 中的重数等于 2, 在 T 中等于 1.

例 14.2 我们由素分解 $24=2^3 3$. 利用重集表示 *24* 的素因子为 $\{2,2,2,3\}$.

定义 14.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,
$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell \tag{1}$$
是 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解. 令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{U_i}$ 和 $\mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i}$. 重集 $\{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 (1) 的初等因子组.

由上一讲引理 12.8 可知, 初等因子组中的元素都是 $F[t]$ 中(首一)不可约多项式的幂次. 类似地, 我们可以定义矩阵的初等因子组.

例 14.4 设 $\mathcal{E}$ 是 V 上的恒同算子, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则
$$V=\langle\mathbf{e}_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\mathbf{e}_n\rangle,$$
是 V 的一个 $\mathcal{E}$-不可分子空间的直和分解. 算子 $\mathcal{E}$ 关于上述直和分解的初等因子组是
$$\{\underbrace{t-1,\ldots,t-1}_{n}\}.$$

例 14.5 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的导数算子. 则 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的初等因子组是 $\{t^n\}$.

在本节中, 我们将说明以下结论:

(i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;

(ii) 当 $F=\mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型;

(iii) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

引理 14.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}}=pq$, 其中 $p,q\in F[t]$ 首一. 再设 $\mathbf{v}$ 是 V 中的 $\mathcal{A}$-循环向量. 令 $\mathbf{w}=q(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 则 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}=p$.

证明. 首先, $p(\mathcal{A})(\mathbf{w})=p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}(t)|p(t)$. 反之, 因为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}(\mathbf{w})=\mathbf{0}$, 所以 $(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 对任意 $\mathbf{x}\in V$, 存在 $f\in F[t]$ 使得 $\mathbf{x}=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 于是, $(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)(\mathcal{A})(\mathbf{x})=f(\mathcal{A})(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 于是, $(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 由此得出,
$$\mu_{\mathcal{A}}|(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)\implies(pq)|(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}q)\implies p|\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}.$$

故 $p=\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}$. □

引理 14.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$. 则

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg(p), & 0 < k \le m \\ \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

证明. 设 $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$-循环向量. 令 $\mathbf{w}_k = p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v})$.

断言. 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$.
断言的证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 10.2 (i)). 于是,

$$p^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p^k(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k.$$

由此得出, $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) \subset F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 反之, 由 $\mathbf{w}_k$ 的定义可知, $\mathbf{w}_k \in \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 因为 $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第二讲命题 6.5), 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k \subset \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 断言成立.

根据第二章第一讲推论 1.14,

$$\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = \dim(\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))).$$

由上述断言,

$$\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = \dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k).$$

再由第二章第四讲命题 10.2 (iii),

$$\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = \deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}_k}).$$

由引理 14.6, 当 $0 < k \le m$ 时, $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}_k} = p^{m-k}$. 于是,

$$\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = (m-k)\deg(p).$$

当 $k > m$ 时, $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$, 从而 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}_k} = 1$. 于是,

$$\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = 0. \quad \square$$

引理 14.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$. 设

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell, \tag{2}$$

其中 $U_1, \ldots, U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的子空间. 则

$$f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_\ell).$$

证明. 设 $W = f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$. 因为 $U_i \subset V$, 所以 $f(\mathcal{A})(U_i) \subset f(\mathcal{A})(V)$. 于是, $W \subset f(\mathcal{A})(V)$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in f(\mathcal{A})(V)$. 则存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由 (2) 可知

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell,$$

其中 $\mathbf{v}_i \in U_i, i = 1, 2, \ldots, \ell$. 由此得出

$$\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_\ell).$$

因为 U_i 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) \in U_i$. 故 $\mathbf{x} \in W$. 我们得到 $f(\mathcal{A})(V) = W$.

下面验证: $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. 设 $\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_\ell$, 其中 $\mathbf{w}_i \in f(\mathcal{A})(U_i)$. 则 $\mathbf{w}_i \in U_i$. 由 (2) 可知, $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ (第一章第二讲命题 4.16). 进而, 同样的命题蕴含 $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. $\square$

第十五周讲义

定理 14.9 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$ 不可约. 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 设 n_ℓ 是 p^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中 p^ℓ 的重数. 令 $d = \deg(p)$ 和 $r_\ell = \operatorname{rank}(p^m(\mathcal{A}))$. 则

$$n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \tag{3}$$

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{4}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则存在 $m_1, \ldots, m_k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ 使得 $\mu_1 = p^{m_1}$, $\mu_2 = p^{m_2}$, $\ldots$, $\mu_k = p^{m_k}$. (见第二章第二讲定理 6.9). 由第二章第五讲引理 12.8 和第二章第四讲定理 10.7, $\dim(V_i) = m_i d$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, $\dim(V_i) \le md$. 令 $\mathbb{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$. 则 n_ℓ 是 $\mathbb{S}$ 中维数等于 ℓd 的子空间的个数.

对 $j \in \{1, \ldots, m\}$, 令 $\mathbb{S}_j = \{U \in \mathbb{S} \mid \dim(U) = jd\}$. 则 (4) 可重写为

$$V = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} U \right). \tag{5}$$

根据引理 14.8, 我们有

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right). \tag{6}$$

我们运用维数和秩的关系推导:

$$\begin{aligned}
r_\ell &= \dim\left(p(\mathcal{A})^\ell(V)\right) && (r_\ell \text{ 的定义}) \\
&= \dim\left(\bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right) \right) && (\text{根据 } (6)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} \dim(p(\mathcal{A})^\ell(U)) \right) && (\text{第一章第二讲命题 } 4.16) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} \operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^\ell) \right) && (\text{限制算子和第二章第一讲推论 } 1.14) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m} \left(\sum_{U \in \mathbb{S}_j} (j-\ell)d \right) && (\text{引理 } 14.7) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j (j-\ell)d \quad (n_j \text{ 的定义})
\end{aligned}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$ 成立. 令 $r_0 = \dim(V)$. 则由上式和 (8), 我们有

$$r_\ell = d \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j (j - \ell) \tag{7}$$

对任意 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立.

我们要利用 (7) 把 $n_1, n_2, \ldots,$ 用 $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots,$ 表示出来. 根据 (7) 可知, 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$

$$r_{\ell-1} = d\left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j - \ell + 1)\right),$$

$$r_\ell = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j - \ell)\right),$$

和

$$r_{\ell+1} = d\left(\sum_{j=\ell+2} n_j (j - \ell - 1)\right).$$

于是,

$$r_{\ell-1} - r_\ell = d\left(n_\ell + n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right), \quad r_\ell - r_{\ell+1} = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right).$$

即

$$(r_{\ell-1} - r_\ell) - (r_\ell - r_{\ell+1}) = dn_\ell \implies n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \quad \square$$

例 14.10 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

已知 $\chi_A = t^4$. 计算 J_A.

解. $r_0 = \mathrm{rank}(A^0) = 4$, $r_1 = \mathrm{rank}(A) = 2$. 于是, 0 的几何重数等于 2. 由此得出 J_A 中有两个关于 0 的 *Jordan* 块.

$$r_2 = \mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

于是

$$n_1 = 4 + 1 - 2 \times 2 = 1.$$

由此直接推出 $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$. 故

$$J_A = \begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 14.11 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, μ 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1, \ldots, p_s$, 它们的次数分别是 $d_1, \ldots, d_s$. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $N(i, \ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中 p^ℓ 的重数. 则

$$N(i, \ell) = \frac{1}{d_i}(R(i, \ell - 1) + R(i, \ell + 1) - 2R(i, \ell)),$$

其中 $R(i, j) = \mathrm{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j \in \mathbb{N}$. 特别地, 任何 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解初等因子组都相等(称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子组).

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{8}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 注意到对 $j = 1, 2, \ldots, k$, $\mu_j = \mu_{\mathcal{A}_{V_j}}$ 是某个 $p_1, \ldots, p_s$ 的幂次. 我们不妨对 $i = 1$ 来证明定理的结论.

设 $\mathbb{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ 且 $\mathbb{S}_1 = \{U \in \mathbb{S} \mid p_1 | \mu_{\mathcal{A}_U}\}$. 令

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U \quad 和 \quad \widetilde{W} = \bigoplus_{U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)} U.$$

则

$$V = W \oplus \widetilde{W}. \tag{9}$$

断言 1. 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, 令 $r_\ell = \mathrm{rank}(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell)$. 则

$$N(1, \ell) = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

断言 1 的证明. 注意到 $\mathcal{A}_W$ 是 W 上的线性算子, $W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U$ 是 W 的 $\mathcal{A}_W$-不可分子空间分解, 且 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式是 p_1 的某个幂次, 根据定理 14.9, p_1^ℓ 在 $\mathcal{A}_W$ 关于上述 W 的直和分解的初等因子组中出现的重数

$$n_\ell = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

再注意到对任意 $U\in(\mathbb{S}\backslash\mathbb{S}_1)$, $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式都不是 p_1 的任何幂次. 于是 $N(1,\ell)=n_\ell$. 断言 1 成立.

断言 2. $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆.
断言 2 的证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}_W}=p_1^m$ 且 $q=\mu_{\mathcal{A}_{\widetilde{W}}}$. 因为 q 是 $p_2,\ldots p_s$ 的幂次之积 (第二章第二讲定理 6.9), 所以 p_1^m 与 q 互素. 于是 $\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(p_1^m,q)=p_1^m q$ (第二章第二讲引理 6.7 和定理 5.3). 根据第二章第五讲引理 11.3, $p_1(\mathcal{A})^m|_{\widetilde{W}}$ 上可逆. 于是, $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆. 断言 2 成立.

断言 3. 对任意 $\ell\in\mathbb{N}$, $R(1,\ell)=r_\ell+\dim(\widetilde{W})$.
断言 3 的证明. 由引理 14.8,

$$p_1(\mathcal{A})^\ell(V)=p_1(\mathcal{A})^\ell(W)\oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W}).$$

于是,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V))=\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(W))+\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})).$$

根据断言 2,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V))=\dim(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell(W))+\dim(\widetilde{W}).$$

根据第二章第一讲推论 1.14

$$R(1,\ell)=r_\ell+\dim(\widetilde{W}).$$

断言 3 成立.

对任意 $\ell\in\mathbb{Z}^+$, 我们计算

$$\begin{aligned}
N(1,\ell)&=\frac{1}{d_1}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell) && (\text{断言 }1)\\
&=\frac{1}{d_1}(r_{\ell-1}+\dim(\widetilde{W})+r_{\ell+1}\dim(\widetilde{W})-2(r_\ell+\dim(\widetilde{W})))\\
&=\frac{1}{d_1}(R(1,\ell-1)+R(1,\ell+1)-2R(1,\ell)). && (\text{断言 }3)
\end{aligned}$$

由上述公式看出, 初等因子组只与 $p_i(\mathcal{A})^\ell$ 有关. 故初等因子组独立于 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的选择. □

定义 14.12 设 $A\in\mathrm{M}_n(F)$. 把 A 看成从 F^n 上的线性算子所对应的初等因子组称为矩阵 A 的初等因子组.

定理 14.13 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 在不计 *Jordan* 块的前提下, A 的 *Jordan* 标准型由 A 的初等因子组唯一确定.

证明. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 确定. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 根据代数学基本定理, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu_1 = (t-\alpha_1)^{d_1}, \ldots, \mu_k = (t-\alpha_k)^{d_k}.$$

于是, $\mathcal{A}$ 的初等因子组是

$$\{(t-\alpha_1)^{d_1}, \ldots, (t-\alpha_k)^{d_k}\}.$$

根据第二章第六讲引理 13.1, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

于是, $A \sim_s J_A$ 且 J_A 由$\mathcal{A}$ 的初等因子组唯一确定. $\square$

由上述定理可知, 记号 J_A 以及把 J_A 称为 A 的 Jordan 标准型都是合理的. 进而, 计算复数域上方阵的 Jordan 标准型等价于计算该矩阵的初等因子组.

注解 14.14 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的不可约因子是

$$t-\lambda_1, \ldots, t-\lambda_s.$$

我们可以把定理 *14.11* 中的 $R_{i,\ell}$ 和 $N_{i,\ell}$ 分别记为 $R_{\lambda_i,\ell}$ 和 $N_{\lambda_i,\ell}$. 此时的重数公式是

$$N(\lambda_i,\ell) = R(\lambda_i,\ell-1) + R(\lambda_i,\ell+1) - 2R(\lambda_i,\ell),$$

其中 $\lambda_i \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A), \ell \in \mathbb{Z}^+$.

例 14.15 设:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_7(\mathbb{C}).$$

计算 J_A.

解. 由计算机计算得: $\chi_A = t^7 - 9\,t^6 + 34\,t^5 - 70\,t^4 + 85\,t^3 - 61\,t^2 + 24\,t - 4 = (t-2)^2(t-1)^5$. 设 $\lambda_1 = 2$ 和 $\lambda_2 = 1$. 显然 $R(\lambda_1, 0) = 7$. 由计算机得 $R(\lambda_1, 1) = 6, R(\lambda_1, 2) = 5$. 于是,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 7 + 5 - 2 \times 6 = 0.$$

由计算机得 $R(\lambda_1, 3) = 5.$, 于是,

$$N(\lambda_1, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2) = 6 + 5 - 2 \times 5 = 1.$$

因为 λ_1 的代数重数等于 2, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_1, \ell) = 0$.

显然 $R(\lambda_2, 0) = 7$. 由计算机得$R(\lambda_2, 1) = 4, R(\lambda_2, 2) = 2$. 于是,

$$N(\lambda_2, 1) = R(\lambda_2, 0) + R(\lambda_2, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 7 + 2 - 2 \times 4 = 1.$$

由计算机得 $R(\lambda_2, 3) = 2.$, 于是,

$$N(\lambda_2, 2) = R(\lambda_2, 1) + R(\lambda_2, 3) - 2R(\lambda_1, 2) = 4 + 2 - 2 \times 2 = 2.$$

因为 λ_2 的代数重数等于 5, 所以当 $\ell > 2$ 时, $N(\lambda_2, \ell) = 0$.

由此得出

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 14.16 设 $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$. 设

$$\mathrm{rank}(A) = 3,\ \mathrm{rank}(A^2) = 2,\ \mathrm{rank}(A+E) = 4,\ \mathrm{rank}((A+E)^2) = 3.$$

求 J_A

解. 由秩的条件可知 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = -1$ 是 A 的两个特征根. 根据定理 *14.11*,

$$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1) = 5 + 2 - 2 \times 3 = 1$$

和

$$N(\lambda_2, 1) = R(\lambda_2, 0) + R(\lambda_2, 2) - 2R(\lambda_2, 1) = 5 + 3 - 2 \times 4 = 0.$$

注意到 $\mathrm{rank}(A) = 3$ 和 $\mathrm{rank}(A + E) = 4$ 分别蕴含 λ_1 的几何重数是 2 和 λ_2 的几何重数是 1. 由此得出 $N(\lambda_1, 2) = 1$ 和 $N(\lambda_2, 2) = 1$. 我们有

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

§15 矩阵相似的判定

引理 15.1 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A \sim_s B$. 则对任意 $f \in F[t]$, $f(A) \sim_s f(B)$. 特别地, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(B))$.

证明. 设 $A = P^{-1}BP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$. 由 $A^k = P^{-1}B^kP$, $k \in \mathbb{N}$, 可知

$$f(A) = P^{-1}f(B)P. \quad \square$$

定理 15.2 *(相似判别法I)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当 A 和 B 由共同的初等因子组.

证明. 设 $A \sim_s B$. 则 $\mu_A = \mu_B$ (第二章第二讲命题 4.9). 设 $p_1, \ldots p_s$ 是 μ_A 的两两互素的首一的不可约因子, 则它们也是 μ_B 的两两互素的首一的不可约因子. 根据引理 15.1, 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, 我们有 $\mathrm{rank}(p_i(\mathcal{A})^\ell) = \mathrm{rank}(p_i(\mathcal{B})^\ell)$. 由定理 14.11, A 和 B 由共同的初等因子组.

反之, 设 A 和 B 由共同的初等因子组 $\{p_1, \ldots, p_k\}$. 把 A 和 B 看成 F^n 的算子分别记为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$. 令

$$F^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, W_i 是 $\mathcal{B}$-不可分的, $i = 1, 2, \ldots, k$. 适当调整下标后可再设 $\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mathcal{B}_{W_i}$ 的极小多项式都是 p_i. 令

$$p_i = t^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1}t^{d_i-1} + \cdots + \alpha_{i,1}t + \alpha_{i,0},$$

其中 $\alpha_{i,n-1},\ldots,\alpha_{i,1},\alpha_{i,0}\in F$. 因为 V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 所以它是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是存在 $\mathbf{v}_i\in V$ 使得 $V_i=F[\mathcal{A}_{V_i}]\mathbf{v}_i$. 由此得出 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在基底 $\mathbf{v}_i,\mathcal{A}(\mathbf{v}_i),\ldots\mathcal{A}^{d_i-1}(\mathbf{v}_i)$ 下的矩阵是

$$M_i=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-\alpha_{i,0}\\1&0&\cdots&0&-\alpha_{i,1}\\0&1&\cdots&0&-\alpha_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-\alpha_{i,d_i-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{d_i}(F).$$

同理存在 $\mathbf{w}_i\in V$ 使得 $W_i=F[\mathcal{B}_{V_i}]\mathbf{w}_i$, 且 $\mathcal{B}_{W_i}$ 在基底 $\mathbf{w}_i,\mathcal{B}(\mathbf{w}_i),\ldots\mathcal{B}^{d_i-1}(\mathbf{w}_i)$ 下的矩阵也是 M_i. 由第二章第二讲定理 6.9,

$$A\sim_s\begin{pmatrix}M_1&O&\cdots&O\\O&M_2&\cdots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\cdots&M_k\end{pmatrix}\quad 和\quad B\sim_s\begin{pmatrix}M_1&O&\cdots&O\\O&M_2&\cdots&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\O&O&\cdots&M_k\end{pmatrix}.$$

于是, $A\sim_s B$. □

定理 15.3 *(相似判别法II) 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(F)$. 则 $A\sim_s B$ 当且仅当下述两点同时成立:*

(i) $\chi_A=\chi_B$, 或 $\mu_A=\mu_B$;

(ii) 设 $p_1,\ldots,p_s$ 是 χ_A 或 μ_A 在 $F[t]$ 中的两两互素的(首一的)不可约因子. 对任意 $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,2,\ldots,s\}$,

$$\mathrm{rank}(p_j(A)^i)=\mathrm{rank}(p_j(B)^i).$$

证明. 设 $A\sim_s B$. 则 $\chi_A=\chi_B$ 和 $\mu_A=\mu_B$ (第二章第三讲定义 8.6 后的讨论和第二章第二讲命题 4.9). 由引理 15.1, 对任意 $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,2,\ldots,s\}$,

$$p_j(A)^i\sim_s p_j(B)^i\implies\mathrm{rank}(p_j(A)^i)=\mathrm{rank}(p_j(B)^i).$$

反之, 设 $\chi_A=\chi_B$ 和 (ii), 或 $\mu_A=\mu_B$ 和 (ii) 成立. 则 A 和 B 由共同的初等因子组(定理 14.11). 于是, $A\sim_s B$ (定理 15.2). □

例 15.4 *设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明: $A\sim_s A^t$.*

证明. *因为 $\det((tE-A))=\det((tE-A)^t)=\det((tE-A^t))$, 所以 $\chi_A=\chi_{A^t}$. 注意到对任意 $f\in F[t]$, $f(A)^t$=$f(A^t)$. 故 rank($f(A)$)=rank($f(A^t)$). 由定理 15.3 可知, A~$_sA^t$.* □

定理 15.5 *(相似判别法III)* 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 则 $A \sim_s B$ 当且仅当对任意 $f \in F[t]$,

$$\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B)).$$

证明. 设 $A \sim_s B$. 则对任意 $f \in F[t]$, $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}((f(B))$ (引理 15.1). 反之, 因为 $\mathrm{rank}(\mu_A(A)) = 0$, 所以 $\mathrm{rank}(\mu_A(B)) = 0$. 于是 $\mu_A(B) = O$. 由此可知 $\mu_B|\mu_A$(第二章第二讲引理 4.2). 同理 $\mu_A|\mu_B$. 于是, $\mu_A = \mu_B$. 由定理 15.3 可知, $A \sim_s B$. □.

例 15.6 设 F 是域 K 的子域. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 则存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$.
证明. 因为存在 $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ 使得 $A = P^{-1}BP$, 所以对任意 $f \in K[t]$,

$$\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(B))$$

(定理 15.5. 特别地, 任意 $g \in F[t]$,

$$\mathrm{rank}(g(A)) = \mathrm{rank}(g(B)).$$

再由定理 15.5, 存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = Q^{-1}BQ$. □

例 15.7 设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 证明:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \Longrightarrow J_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2^{-1}) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}.$$

证明. 首先, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 蕴含 A 的特征根非零. 于是, λ_i^{-1} 有意义. 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$. 则

$$|\lambda E - A| = 0 \iff |A||\lambda A^{-1} - E| = 0 \iff |\lambda^{-1}E - A^{-1}| = 0.$$

即 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) \iff \lambda^{-1} \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A^{-1})$. 于是, $p_\lambda = t - \lambda$ 是 χ_A 的因子当且仅当 $q_\lambda = t - \lambda^{-1}$ 是 $\chi_{A^{-1}}$ 的因子. 设 $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$. 则

$$\mathrm{rank}((A - \lambda E)^\ell) = \mathrm{rank}(A^\ell(E - \lambda A^{-1})^\ell) = \mathrm{rank}((\lambda^{-1}E - A^{-1})^\ell).$$

于是, 对任意 $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathrm{rank}(p_\lambda(A)^\ell) = \mathrm{rank}(q_\lambda(A)^\ell)$. 根据定理 14.11, 对任意 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, p_λ 在 A 的初等因子组中的重数等于 q_λ 在 A^{-1} 的初等因子组中的重数. 故对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$, $J_m(\lambda)$ 出现在 J_A 中的重数等于 $J_m(\lambda^{-1})$ 出现在 $J_{A^{-1}}$ 中的重数. □

注解 15.8 上述例子说明: 如果 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}A = \{1\}$, 则 $A \sim_s A^{-1}$.