第三章 内积空间

§1 欧式空间

约定: 在本节中 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间.

§1.1 V 上的内积

定义 1.1 设 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 V 上的双线性型满足 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 是正定的. 则称 (V,f) 是一个欧式空间, f 是 V 上的内积.

例 1.2 *(标准欧式空间)* 设 $V=\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}^t\mathbf{y}. \end{array}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^tE\mathbf{y}$. 于是, f 是 $\mathbb{R}^n$ 对称双线性型, 且 $f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\mathbf{x}$ 是正定的. 于是, (V,f) 是欧式空间.

例 1.3 设 $V=\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rccc} f: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & \mathrm{tr}(X^tY). \end{array}$$

下面我们来验证 f 是 V 上的内积. 首先设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $A,B\in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha A+\beta B,Y) &= \mathrm{tr}((\alpha A+\beta B)^tY) && (f \text{ 的定义}) \\ &= \mathrm{tr}((\alpha A^t+\beta B^t)Y) && (\text{转置的性质}) \\ &= \mathrm{tr}(\alpha(A^tY)+\beta(B^tY)) && (\text{矩阵乘法分配律}) \\ &= \alpha\mathrm{tr}(A^tY)+\beta\mathrm{tr}(B^tY) && (\mathrm{tr} \text{ 是线性函数}) \\ &= \alpha f(A,Y)+\beta f(B,Y) && (f \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

于是, f 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 f 关于第二个变元也是线性的. 故 f 是双线性型. 注意到

$$f(Y,X)=\mathrm{tr}(Y^tX)=\mathrm{tr}((Y^tX)^t)=\mathrm{tr}(X^tY)=f(X,Y).$$

于是, f 是对称的. 设 $X=(x_{i,j})\neq O$. 则

$$f(X,X)=X^tX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}^2>0.$$

于是, $f(X,X)$ 是正定的. 由此得出 (V,f) 是欧式空间.

例 1.4 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$, $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$.

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \end{array}$$

下面我们来验证 ϕ 是 V 上的内积. 首先设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $p,q\in V$,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha p+\beta q,g) &= \int_a^b(\alpha p(x)+\beta q(x))g(x))dx && (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \alpha\int_a^b p(x)g(x)dx+\beta\int_a^b q(x)g(x)dx && (\int_a^b \text{ 是线性函数}) \\ &= \alpha f(p,g)+\beta f(q,g) && (f \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

于是, ϕ 关于第一个变元是线性的. 类似地可验证 ϕ 关于第二个变元也是线性的. 故 ϕ 是双线性型. ϕ 显然是对称的. 设 $f\in R[x]_n\setminus\{0\}$,

$$\phi(f,f)=\int_a^b f(x)^2dx>0.$$

于是, $\phi(f,f)$ 是正定的. 由此得出 (V,ϕ) 是欧式空间.

我们把欧式空间 V 上的内积记为 $(\ |\ )$. 即

$$\begin{array}{rccc} (\,|\,): & V\times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & (\mathbf{x}|\mathbf{y}). \end{array}$$

利用上述符号, 内积的基本性质如下:

(i) (双线性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$(\alpha\mathbf{x}+\beta y|\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y}|\mathbf{z}),\quad (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z})=\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\beta(\mathbf{x}|\mathbf{z}).$$

(ii) (对称性)对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

(iii) (正定性)对任意 $\mathbf{x}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x})\geq 0 \quad \text{且} \quad (\mathbf{x}|\mathbf{x})=0 \iff \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

定义 1.5 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\in V$. 定义

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)=((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m\times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 的 Gram 矩阵.

由内积的对称性可知 $\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)$ 是对称的.

命题 1.6 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\in V$. 则 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当

$$\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m))<m.$$

证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

上述方程组等价于

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j)=0,\quad i=1,\ldots,m.$$

由此得出等价条件:

$$(\mathbf{v}_i|\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\mathbf{v}_j}_{\mathbf{w}})=0,\quad i=1,\ldots,m. \tag{2}$$

若 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m))<m$, 则存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$, 不全为零, 使得 (1) 成立. (见上学期第二章第二讲推论 2.1). 于是, (2) 成立. 由此得出

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\mathbf{v}_i|\mathbf{w})=(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{v}_i|\mathbf{w})=(\mathbf{w}|\mathbf{w})=0.$$

故 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$. 从而 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 线性相关.

反之, 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$. 于是, (2) 成立. 那么, (1) 成立. 由此得出 $\mathrm{rank}(G(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m))<m$ (上学期第二章第二讲推论 2.1). □

§1.2 长度、距离、角度和正交

本节从此以后 V 代表有限维的欧式空间, 其上的内积记为 $(\,|\,)$.

定义 1.7 *设 V 是欧式空间, $\mathbf{x}\in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 $\mathbf{x}$ 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y}\in V$. 则 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 称为 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 之间的距离.*

由内积的正定性可知, $\|\mathbf{x}\|$ 是良定义的且 $\|\mathbf{x}\|=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 由双线性可知 $\|\mathbf{x}\|=\|-\mathbf{x}\|$. 从而 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ 等且仅当 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\mathbf{0}$, 且 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$.

定理 1.8 *设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 则$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|\le\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (Cauchy-Bunyakovski 不等式). 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 线性相关.*

证明. 当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 时定理中的结论显然成立. 设 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ 和 λ 是任意实数. 则 $(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})\geq 0$. 利用双线性性和对称性得

$$(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})=(\mathbf{y}|\mathbf{y})\lambda^2+2(\mathbf{x}|\mathbf{y})\lambda+(\mathbf{x}|\mathbf{x})\geq 0.$$

于是, $\Delta:=4(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2-4(\mathbf{y}|\mathbf{y})(\mathbf{x}|\mathbf{y})\leq 0$. 由此得出

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2\leq(\mathbf{y}|\mathbf{y})(\mathbf{x}|\mathbf{y})\implies|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|\leq\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

注意到 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 $\Delta=0$ 当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}|\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y})=0.$$

这结论等价于 $\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}=\mathbf{0}$ (内积正定性). 在 $\mathbf{y}\neq 0$ 得条件下, 上述结论等价于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 线性相关. □

例 1.9 *在标准欧式空间中, Cauchy-Bunyakovski 不等式是对任意* $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$

$$|x_1y_1+\cdots+x_ny_n|\leq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

在例 1.3 定义的矩阵欧式空间中, Cauchy-Bunyakovski 不等式是对任意 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\mathrm{tr}(A^tB)|\leq\sqrt{\mathrm{tr}(A^tA)}\sqrt{\mathrm{tr}(B^tB)}.$$

在例 1.4 定义的多项式欧式空间中, Cauchy-Bunyakovski 不等式是对任意 $f,g\in\mathbb{R}[x]_n$,

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx|\leq\sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2dx}.$$

设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 且存在 $\alpha\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{y}$ 或 $\mathbf{y}=\alpha\mathbf{x}$. 则称 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 平行. 如果 $\alpha\geq 0$, 则称 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 同向. 如果 $\alpha\leq 0$, 则称 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 反向. 有时也称 $\mathbf{0}$ 是迷向的.

推论 1.10 *设* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. *则* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. *等式成立等且仅当* $\mathbf{x}$ *和* $\mathbf{y}$ *同向.*

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2&=(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{x}+\mathbf{y}) && \text{(长度的定义)}\\&=(\mathbf{x},\mathbf{x})+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) && \text{(双线性和对称性)}\\&=\|\mathbf{x}\|^2+2(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2 && \text{(长度的定义)}\\&\leq\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2 && \text{(Cauchy-Bunyakovski)}\\&=(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

下面验证等式成立的充要条件. 不妨设 $\mathbf{y} \neq 0$. 由上面计算可知等式成立当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. 根据定理 1.8, 此时存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$. 于是, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 等价于 $(\alpha\mathbf{y}|\mathbf{y}) = \|\alpha\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|$, 即 $\alpha\|\mathbf{y}\|^2 = |\alpha|\|\mathbf{y}\|^2$. 换言之, $\alpha = |\alpha|$. 即 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 同向. □

设 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 则称 $\mathbf{x}$ 是单位向量. 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 则 $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 是与 $\mathbf{v}$ 同向的单位向量, 称为 $\mathbf{v}$ 的单位化向量.

定义 1.11 *设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 称*

$$\arccos\left(\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right)$$

是 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的夹角.

根据 Cauchy-Bunyakovski 不等式, 夹角是良定义的. 它的通常取值范围是 $[0, \pi]$.

定义 1.12 *设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 正交, 记为 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.*

零向量与任何向量都正交.

引理 1.13 *设 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$, 其中 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 非零.*

(i) $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) 如果 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

证明. (i) 注意到

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \iff \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(ii) 因为对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 满足 $i \neq j$, 我们有 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$, 所以

$$\mathrm{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = \mathrm{diag}((\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_k)).$$

因为对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_i) \neq 0$, 所以 $\mathrm{rank}(\mathrm{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)) = k$. 根据命题 1.6, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ 线性无关. □

例 1.14 *(加强版的勾股定理) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 证明 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ 当且仅当 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.*
证明. 因为 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2$, 所以 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 即 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. □

§1.3 单位正交基

设 $\dim(V) = n$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 中两两正交的单位向量. 根据引理 1.13, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 称为 V 的一组单位正交基.

例 1.15 在标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 标准基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是一组标准正交基.

在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathbf{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \mathbf{v} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ 是一组标准基.

定理 1.16 *(Gram-Schmidt 正交化)* 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_i \rangle,$$

$i = 1, 2, \dots, k$. 特别地, V 有单位正交基.

证明. 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时, 取 ϵ_1 为 $\mathbf{v}_1$ 的单位化向量即可. 设存在两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1} \rangle,$$

$i = 1, 2, \dots, k-1$. 令

$$\epsilon_k' = \mathbf{v}_k - (\mathbf{v}_k|\epsilon_1)\epsilon_1 - \cdots - (\mathbf{v}_k|\epsilon_{k-1})\epsilon_{k-1}. \tag{3}$$

我们先来验证

$$\underbrace{\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k \rangle}_{V_k} = \underbrace{\langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_k' \rangle}_{W_k'}. \tag{4}$$

根据 (3), $\mathbf{v}_k \in W_k'$. 而归纳假设蕴含 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1} \in W_k'$. 故 $V_k \subset W_k'$. 反之，归纳假设蕴含 $\langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1} \rangle \subset V_k$, 而 (3) 蕴含 $\epsilon_k' \in \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \mathbf{v}_k \rangle$. 故 $\epsilon_k' \in V_k$. 由此得出 $W_k' \subset V_k$. 等式 (4) 成立. 特别地，我们有 $\dim(W_k') = k$. 故 $\epsilon_k' \neq \mathbf{0}$.

对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, 我们利用 (3) 计算得：

$$(\epsilon_k'|\epsilon_i) = (\mathbf{v}_k|\epsilon_i) - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k|\epsilon_j)(\epsilon_j|\epsilon_i) = (\mathbf{v}_k|\epsilon_i) - (\mathbf{v}_k|\epsilon_i) = 0.$$

故 ϵ_k' 与 ϵ_i 正交. 令 ϵ_k 是 ϵ_k' 得单位化向量. 则 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_k$ 是两两正交得单位向量. 根据 (4), $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_i \rangle$.

例 1.17 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算子空间 $U=\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$ 的一组单位正交基.

解. 由 *Gram-Schmidt* 正交化得

$$\epsilon_1=\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1.$$

$$\epsilon_2'=\mathbf{u}_2-(\mathbf{u}_2|\epsilon_1)\epsilon_1=\mathbf{u}_2-\|\mathbf{u}\|^{-2}(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2-\frac{1}{2}\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_2=\frac{\epsilon_2'}{\|\epsilon_2\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_3'=\mathbf{u}_3-(\mathbf{u}_3|\epsilon_1)\epsilon_1-(\mathbf{u}_3|\epsilon_2)\epsilon_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

$$\epsilon_3=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

于是, U 得一组单位正交基是 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$. □