第三章 内积空间

§1 欧式空间

例 1.18. 定理 *1.16* 的证明称为 *Gram-Schmidt* 正交化. 该定理说明

$$\epsilon_i \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_i = \langle \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i \rangle.$$

故存在上三角的矩阵 $S, T \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ 使得

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)S \quad \text{和} \quad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)T.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 是 两组线性无关的向量, 所以 S, T 都是可逆的. 下面证明:

$$T = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1|\epsilon_1) & (\mathbf{v}_2|\epsilon_1) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_1) \\ & (\mathbf{v}_2|\epsilon_2) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\mathbf{v}_k|\epsilon_k) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

设 $T = (t_{i,j})_{k \times k}$. 因为 T 是上三角形矩阵, 所以

$$\mathbf{v}_j = t_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + t_{j,j}\epsilon_j.$$

设 $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$. 我们计算

$$(\mathbf{v}_j|\epsilon_i) = \left(\sum_{\ell=1}^{j} t_{\ell,j}(\epsilon_\ell|\epsilon_i) \right) = \sum_{\ell=1}^{j} t_{\ell,j}(\epsilon_\ell|\epsilon_i) = t_{i,j}.$$

于是, (1) 成立. □

命题 1.19. 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 在这组基下的坐标分别是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \ldots, y_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

证明. 由内积的双线性得

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i | \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j).$$

因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基, 所以 $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$. 故

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \quad \square$$

注释 1.20. 上述命题的另一种表述形式是双线性型 $(|)$ 在单位正交基下的矩阵是 E.

命题 1.21. 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x} \in V$. 则 $\mathbf{x}$ 在该基下的第 i 个坐标分量是 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \middle| \mathbf{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\mathbf{e}_j|\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{j,i} = x_i. \quad \square$$

定理 1.22. 设 V 和 W 是两个 n-维欧氏空间, 其中的内积分别记为 $(|)_V$ 和 $(|)_W$. 则存在线性同构 $\phi : V \longrightarrow W$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{y})|\phi(\mathbf{y}))_W.$$

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 而 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 W 的一组单位正交基. 则存在线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{e}_i) = \epsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (第一章第二讲定理 4.12). 进而, ϕ 是线性同构(第一章第二讲定理 4.13 的证明). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 根据命题 1.19,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

因为 $\phi(\mathbf{x}) = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$ 和 $\phi(\mathbf{y}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, 所以命题 1.21 蕴含

$$(\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

我们有 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W$. $\square$

§2 正交补

定义 2.1 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间. 如果对于任意的 $\mathbf{u}_1 \in U_1$ 和 $\mathbf{u}_2 \in U_2$ 我们有 $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$, 则称子空间 U_1 和 U_2 正交, 记为 $U_1 \perp U_2$.

定理 2.2 设 $U \subset V$ 是子空间. 定义 $U^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{u} \perp \mathbf{x}\}$. 则

(i) $U^\perp$ 是子空间且 $U \perp U^\perp$;

(ii) $V = U \oplus U^{\perp}$ *(称 $U^{\perp}$ 是 U 的正交补).*

(iii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^{\perp}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则对任意 $\mathbf{u} \in U$,

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = 0.$$

于是, $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \perp \mathbf{u}$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U^{\perp}$. 由 $U^{\perp}$ 的定义可知, $U \perp U^{\perp}$.

(ii) 设 $\mathbf{x} \in U \cap U^{\perp}$. 则 $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} = 0$. 于是, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (第三章第一讲引理 1.13 (i)). 我们只要证明 $V = U + U^{\perp}$ 即可. 如果 $U = \{\mathbf{0}\}$, 则 $U^{\perp} = V$. 结论显然成立. 设 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 根据第三章第一讲定理 1.16, U 有单位正交基. 设其为 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\}$. 对任意向量 $\mathbf{x} \in V$, 令 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{x}|\mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d$. 和 $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. 因为 $\mathbf{y} \in U$, 所以我们只要证明 $\mathbf{z} \in U^{\perp}$ 即可. 设 $\mathbf{u}$ 是 U 中任意向量. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{e}_d$. 于是,

$$(\mathbf{z}|\mathbf{u}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{u}) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}) - (\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = 0.$$

(iii) 由正交补得定义可知 $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. 根据 (ii),

$$V = U \oplus U^{\perp} = U^{\perp} \oplus (U^{\perp})^{\perp}.$$

于是, $\dim(U) = \dim((U^{\perp})^{\perp})$ (第一章第二讲命题 4.16). 根据第一章第二讲命题 4.15 (i), 我们得到 $U = (U^{\perp})^{\perp}$. □

推论 2.3 *设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.*

证明. 设 $U = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \rangle$. 则 $U^{\perp}$ 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ (第三章第一讲定理 1.16). 根据定理 2.2, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. □

注解 2.4 *上述推论也可以由 Gram-Schmidt 正交化直接得出. 这是因为从 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 出发可以得到 V 的一组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$. 对这组基做 Gram-Schmidt 正交化得到的单位正交基的前 d 个元素仍然是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$.*

例 2.5 *设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. 则 $\langle \mathbf{e}_1 \rangle^{\perp} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$.*

$$\langle \mathbf{e}_1 \rangle^{\perp\perp} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^{\perp} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle. \quad \square$$

例 2.6 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算子空间 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^{\perp}$ 的一组基.

解. 注意到 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^{\perp}$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_3) = \mathbf{0}$. 即

$$(\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \mathbf{u}_3^t)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

换言之, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^{\perp}$ 是上述方程组的解空间. 直接计算该解空间的基是 $(0, 1, 0, -1)^t$. $\square$

例 2.7 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中子空间 U 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 $U^{\perp}$ 的一组基.

解. 上述方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

由方程组可知 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \in U^{\perp}$. 因为 $\operatorname{rank}(A) + \dim(U) = 3$, 所以 $U^{\perp} = \langle \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \rangle$. *(定理 2.2)*. 因为 $\operatorname{rank}(A) = 2$, 所以 $U^{\perp}$ 的一组基是 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t$. $\square$

§3 正交矩阵与正交等价

设欧式空间 V 由两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P.$$

则对任意 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i|\epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \vec{P}^{(j)}.$$

由此得出 $P^tP = E$, 进而 $PP^t = E$.

定义 3.1 设 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 如果 $P^t = P^{-1}$, 则称 P 是正交矩阵. 所有 n 阶正交矩阵的集合记为 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

显然, E 是正交矩阵.

命题 3.2 集合 $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群.

证明. 根据第一学期第三章第一讲引理 2.4, 只要证明对任意 $P,Q\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $PQ^{-1}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 我们计算

$$(PQ^{-1})^t(PQ^{-1}) = (Q^{-1})^t P^t P Q^{-1} = (Q^t)^t Q^{-1} = QQ^{-1} = E.$$

于是, $(PQ^{-1})^t = (PQ^{-1})^{-1}$. □

命题 3.3 *(i)* 如果 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的列向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一组单位正交基.

(iii) $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的行向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中的一组单位正交基.

证明. (i) 因为 $P^tP = 1$, 所以 $\det(P^tP) = 1$. 于是, $\det(P^t)\det(P) = \det(P)^2 = 1$. 故 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) 对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\vec{P}^i|\vec{P}^j) = \delta_{i,j} \iff (\vec{P}^i)^t \vec{P}^j = \delta_{i,j} \iff P^tP = 1.$$

(iii) 考虑矩阵 P^t 即可. □

例 3.4 证明: $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ 当且仅当存在 θ 使得

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad 或 \quad P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 由命题 *3.3 (ii)* 可知, $a^2 + c^2 = 1$ 可知. 我们不妨设 $a = \cos(\theta)$. 则 $c = \pm\sin(\theta)$. 由命题 *3.3 (iii)* 可知, $a^2 + b^2 = 1$. 于是, $b = \pm\sin(\theta)$. 同理 $c^2 + d^2 = 1$ 得出 $d = \pm\cos(\theta)$.

情形 1. $c = \sin(\theta)$, $b = -\sin(\theta)$. 由 $ab + cd = 0$ 得出 $d = \cos(\theta)$. 此时

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

情形 2. $c=\sin(\theta)$, $b=\sin(\theta)$. 由 $ab+cd=0$ 得出 $d=-\cos(\theta)$. 此时

$$P=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

其它情形可在上述情形中把 θ 换为 $-\theta$ 得到. □

命题 3.5 设欧式空间 V 由基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$, 矩阵 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足

$$(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P.$$

再设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

证明. 设 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基. 由引进正交矩阵的概念的推导过程可知, $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 反之, 设 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 我们有

$$(\epsilon_i|\epsilon_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{P}^{(j)})=(\vec{P}^{(i)})^t\vec{P}^{(j)}=\delta_{i,j}\ (\text{命题 3.3 (ii)}).$$

故 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是单位正交基. □

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$. 则存在唯一的 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)P.$$

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 根据第二章第一讲第 2.2 节第一段,

$$B=P^{-1}AP=P^tAP\quad(\because\ P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})).$$

定义 3.6 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 正交等价(正交相似), 记为 $A\sim_o B$.

我们来验证 $\sim_o$ 是等价关系. 因为 $E\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 所以对任意 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $A=E^{-1}AE$. 故 $A\sim_o A$. 自反性成立.

设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 满足 $A\sim_o B$. 则存在 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B=P^{-1}AP$. 于是, $A=PBP^{-1}$. 根据命题 3.2, $P^{-1}\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 我们得到 $B\sim_o A$. 对称性成立.

再设 $C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 $A\sim_o B$ 和 $B\sim_o C$. 则存在 $P,Q\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $B=P^{-1}AP$ 和 $C=Q^{-1}BQ$. 于是, $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=(PQ)^{-1}A(PQ)$. 根据命题 3.2, $PQ\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 故 $A\sim_o C$. 传递律成立. 验证完毕.

注解 3.7 符号如定义 *3.6*, 如果 $A\sim_o B$, 则 $A\sim_s B$ 且 $A\sim_c B$. 这是因为正交矩阵的逆和转置相等. 由此可得, 矩阵的相似不变量和合同不变量都是正交等价的不变量.

例 3.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

证明: $A \sim_s B$, $A \sim_c B$ 但 $A \nsim_o B$.

证明. 显然 $\chi_A = \chi_B = t^2$. 因为 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ 且 $\mathrm{rank}(A^2) = \mathrm{rank}(B^2)$. 根据相似判定法则 I, $A \sim_s B$. 设 $P = \mathrm{diag}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 则 $P^t A P = B$. 于是, $A \sim_c B$.

假设存在 $Q \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ 使得 $Q^t A Q = B$. 根据例 3.4, 我们有

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad 或 \quad Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

如果 Q 为前者, 则

$$AQ = QB \implies \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\sin(\theta) = 0$ 且 $\cos(\theta) = 0$. 矛盾. 类似地可证明 Q 也不可能等于后者. □

问题. 给定 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

1. 求它在正交等价下的标准型.

2. 给定 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 判定它们是否正交等价.

§4 正规算子与正规矩阵

记号: 在本节中 V 是 n 维欧式空间, 其中 $n > 0$.

§4.1 伴随算子

定义 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.

命题 4.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一. 如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A, 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^t.

证明. 由线性映射基本定理 II (第一章第二讲定理 4.12), 存在线性算子 $\mathcal{B}$ 使得

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

设 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j$. 我们计算

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) &= (\mathbf{x}|\sum_{j=1}^{n} y_j\mathcal{B}(\mathbf{e}_j)) && (\mathcal{B}\text{ 线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k) && (\mathcal{B}\text{ 的定义}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{e}_j)\right)\mathbf{e}_k) && (\text{和号互换}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|y_j\mathbf{e}_j)\right)\mathbf{e}_k) && (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k) && (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathbf{x}|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{y})\mathbf{e}_k) && (\mathbf{y}\text{ 的定义}) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i|\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}(\mathbf{e}_k)|\mathbf{y})\mathbf{e}_k) && (\mathbf{x}\text{ 的定义}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{y})) && (\text{单位正交基下的内积公式}) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{A}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{y}) && (\text{内积双线性}) \\
&= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) && (\mathcal{A}\text{ 线性}).
\end{aligned}$$

于是, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子. 存在性成立.

设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的另一个伴随算子. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|\mathcal{C}(\mathbf{y}))$. 于是

$$(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})) = 0.$$

取 $\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})$. 我们有 $(\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})|\mathcal{B}(\mathbf{y}) - \mathcal{C}(\mathbf{y})) = 0$. 于是, $\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathcal{C}(\mathbf{y})$. 由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知唯一性成立.

设 $A = (a_{i,j})$. 则

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\mathbf{e}_k|\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\mathbf{e}_i.$$

于是, $\mathcal{B}$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 $(a_{j,i})=A^t$. □

根据上述命题, 我们把 $\mathcal{A}$ 的伴随算子记为 $\mathcal{A}^*$.

§4.2 正规算子

定义 4.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t=A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 4.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

证明. 由命题 4.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 由第二章第一讲定理 2.1, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 AA^t 和 A^tA. 有矩阵表示的唯一性可知(见第二章第一讲第 1.1 节), $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^t=A^tA$. □

定义 4.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

例 4.6 证明正交矩阵是正规矩阵.
证明. 设 $P\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP=E=PP^t$. 故 P 是正规矩阵. □

命题 4.7 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ *(斜)*对称算子当且仅当 A *(斜)*对称矩阵.

证明. 由命题 4.2, A^* 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 于是, $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t=A$; $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t=-A$; □

定义 4.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 4.9 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内;

(ii) $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;

(iii) 对任意 $\mathbf{x}\in V$, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ (保长);

(iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(保距)*.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\delta_{i,j}=(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)})=(\vec{A}^{(i)})^t\vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^tA=E$. 即 $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x}))&=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix})\\ &=(x_1,\ldots,x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=x_1^2+\cdots+x_n^2.\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|\Longrightarrow(\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2-2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))+\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{0})\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$. 同理 $\|\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$. 由上式可得 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$. □

注解 4.10 因为正交矩阵是正规矩阵*(见例 4.6)*, 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交*(保长、保距)*算子.