

第三章 内积空间

§1 欧式空间

§2 正交补

§3 正交矩阵与正交等价

§4 正规算子与正规矩阵

§5 正规矩阵的标准型

§6 对称算子和对称矩阵

§7 斜对称算子和斜对称矩阵

§8 正交算子和正交矩阵

§9 正定算子的平方根和极化分解

定理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是半正定算子. 则存在唯一的半正定算子 \mathcal{B} 使得 $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$.

证明. 因为 \mathcal{A} 是半正定的, 所以它是对称的. 由第三章第三讲定理 6.1, \mathcal{A} 可对角化. 根据谱分解定理(第二章第四次习题课定理 3.1 及其证明)可知

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k,$$

其中, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 是 \mathcal{A} 的所有两两不同的特征根, π_1, \dots, π_k 分别是 V 到 $V^{\lambda_1}, \dots, V^{\lambda_k}$ 的投影. 因为 $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$, 所以 π_1, \dots, π_k 是完全正交等方组. 因为 \mathcal{A} 正定, 所以 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 都是正的(见第三章第三讲推论 6.11). 令

$$\mathcal{B} = \sqrt{\lambda_1} \pi_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \pi_k.$$

则 $\mathcal{B}^2 = \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k = \mathcal{A}$. (见第一章第七次习题 4).

下面验证 \mathcal{B} 是半正定算子. 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 设 $\mathbf{v}_i \in V^{\lambda_i}$. 则

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_1} \pi_1(\mathbf{v}_i) + \cdots + \sqrt{\lambda_k} \pi_k(\mathbf{v}_i) = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i. \quad (1)$$

设 B_i 是 V_i^λ 的一组单位正交基. 由第三章第三讲命题 5.1, $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ 是 V 的单位正交基. 根据 (1), \mathcal{B} 在该基下的矩阵是

$$\text{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_1}}_{\dim(V^{\lambda_1})}, \dots, \underbrace{\sqrt{\lambda_k}, \dots, \sqrt{\lambda_k}}_{\dim(V^{\lambda_k})}).$$

根据第三章第三讲定理 6.1 和推论 6.11, \mathcal{B} 是正定算子.

根据谱分解定理(第二章第四次习题课定理 3.1, $\pi_1, \dots, \pi_k \in \mathbb{R}[A]$, 于是, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}[A]$. 存在性成立.

设 \mathcal{C} 是半正定算子满足 $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. 则 \mathcal{C} 可对角化. 根据谱分解定理(第二章第四次习题课定理 3.1 及其证明), 存在两两非负实数 μ_1, \dots, μ_ℓ 和完全正交等方组 $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$. 使得 $\mathcal{C} = \mu_1\sigma_1 + \cdots + \mu_\ell\sigma_\ell$. 于是

$$\mathcal{A} = \mu_1^2\sigma_1 + \cdots + \mu_\ell^2\sigma_\ell = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k.$$

由谱分解的唯一性, 我们有, $\ell = k$ 且适当调整下标后 $\mu_i^2 = \lambda_i$ 和 $\sigma_i = \pi_i, i = 1, 2, \dots, k$. 于是, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, 从而, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. \square

推论 9.2 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定. 则存在唯一的半正定矩阵 B 使得 $A = B^2$ 且 $B \in \mathbb{R}[A]$.

证明. 把 A 看成标准欧式空间上的线性算子即可. \square

例 9.3 设 A, B 是 n 阶正定矩阵, $AB = BA$. 证明: AB 是正定.

证明. 首先验证 AB 对称. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB.$$

验证完毕. 根据推论 15.5, 存在正定矩阵 $C \in \mathbb{R}[A], D \in \mathbb{R}[B]$ 使得 $A = C^2$ 和 $B = D^2$. 因为 $AB = BA$, 所以 $\mathbb{R}[A]$ 和 $\mathbb{R}[B]$ 中的任何两个元素乘法交换. 特别地, $CD = DC$. 上述验证蕴含 CD 也是对称的. 我们计算

$$AB = C^2 D^2 = CCDD = CDCD = (CD)^t CD.$$

于是, AB 正定(第一章第六讲定理 9.16 (ii)). \square

例 9.4 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 证明: AB 的特征根都是实数.

证明. 由推论 15.5, 存在正定矩阵 C 使得 $A = C^2$. 于是,

$$AB = C^2 B = CC^{-1} C^2 B C C^{-1} = C(CBC)C^{-1}.$$

于是, $AB \sim_s CBC$. 因为 B, C 是对称矩阵, 所以 CBC 也是对称的(直接验证). 根据第三章第三讲定理 6.1, CBC 的特征根都是实数. 因为 $AB \sim_s CBC$, 所以 AB 的特征根都是实数(特征根是相似不变量). \square

定理 9.5 设 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 S 和 正交矩阵 T 使得 $A = ST$.

证明. 设 $B = AA^t$. 根据推论 15.5, 存在正定矩阵 S 使得 $B = S^2$. 设 $T = S^{-1}A$. 下面验证 T 正交. 注意到 S 是对称矩阵. 我们有

$$\begin{aligned} T^t T &= (S^{-1}A)^t (S^{-1}A) = A^t (S^{-1})^t S^{-1} A \\ &= A^t S^{-1} S^{-1} A = A^t S^{-2} A = A^t B^{-1} A \\ &= A^t (A^t)^{-1} A^{-1} A = E. \end{aligned}$$

存在性成立.

设 S' 正定, T' 正交使得 $A = S'T' = ST$. 则

$$AA^t = S'T'(S'T')^t = S'T'(T')^t (S')^t = S'(S')^t = (S')^2.$$

推论 15.5 蕴含 $S = S'$, 从而 $T = T'$. \square .

注解 9.6 考虑矩阵转置, 上述定理也可以叙述为设 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 M 和 正交矩阵 N 使得 $A = NM$.

注解 9.7 上述定理对不可逆矩阵 A 也部分成立. 此时 S 是半正定矩阵且由 A 唯一确定, 但正交矩阵 T 不一定唯一.

推论 9.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 则存在唯一的正定算子 S 和 正交算子 T 使得 $\mathcal{A} = ST$.

证明. 设 \mathcal{A} 在 V 的一组单位正交基下的矩阵是 A . 则 A 正定. 于是, 存在唯一的正定矩阵 S 和正交矩阵 T 使得 $A = ST$. 令 S 和 T 分别是 V 上在上述单位正交基下矩阵为 S 和 T 的线性算子. 则 $\mathcal{A} = ST$. \square .

例 9.9 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 是 V 的两组基. 证明: 存在正交变换 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, 2, \dots, n$, 当且仅当 $(\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j) = (\mathbf{w}_i | \mathbf{w}_j), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

证明. 设正交变换 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, 2, \dots, n$. 根据第三章第二讲命题 4.9, $(\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j) = (\mathcal{A}(\mathbf{v}_i) | \mathcal{A}(\mathbf{v}_j))$. 于是, $(\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j) = (\mathbf{w}_i | \mathbf{w}_j), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

反之, 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. 则存在 $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)A \quad \text{和} \quad (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)B.$$

则

$$(\mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)} \implies G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = A^t A.$$

同理 $G(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = B^t B$. 由假设条件可知 $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = G(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$. 故

$$A^t A = B^t B. \quad (2)$$

根据定理 9.5 和注 9.6, 存在正定矩阵 M, N 和正交矩阵 P, Q 使得 $A = PM$ 和 $B = QN$. 于是

$$A^t A = M^t P^t P M = M^t M = M^2.$$

同理 $B^t B = N^2$. 由 (2) 和定理 9.1, $M = N$. 于是 $P^{-1} A = Q^{-1} B$. 我们得到

$$B = \underbrace{QP^{-1}}_T A. \quad (3)$$

根据第三章第二讲命题 3.2, T 是正交矩阵. 设 $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ 是在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下矩阵为 T 的线性算子. 同样的命题蕴含 \mathcal{T} 是正交算子. 对任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}_j) = \mathcal{T}((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{A}^{(j)}) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) T \vec{A}^{(j)} \stackrel{(3)}{=} (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{B}^{(j)} = \mathbf{w}_j. \quad \square$$

§10 最小二乘法简介

问题. 给定 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$, 求 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4)$$

设 $V_c(A) = \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \rangle$. 则 (4) 有解当且仅当 $\mathbf{b} \in V_c(A)$ 当且仅当 $d(\mathbf{b}, V_c(A)) = 0$. 根据第三章第二次习题课,

$$(4) \text{ 有解} \iff \mathbf{b} = \pi_{V_c(A)}(\mathbf{b}).$$

定义 10.1 设 $\pi_{V_c(A)}(\mathbf{b}) = \alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)}$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 则称 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ 是 (4) 的一个最小二乘 (*least square*) 解.

例 10.2 考虑以下数据

$x\%$	3.6	3.7	3.8	4.0	4.1	4.2
成品率 y	1.0	0.9	0.9	0.6	0.56	0.35

设 $y = a(x\%) + b$. 求 a, b .

解. 方程组为

$$\begin{pmatrix} 3.6 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 3.8 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 4.1 & 1 \\ 4.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.9 \\ 0.9 \\ 0.6 \\ 0.56 \\ 0.35 \end{pmatrix}.$$

其最小二乘解近似为是 $a = -1.05$, $b = 4.81$. 于是, 杂质浓度 ($x\%$) 和成品率 y 之间的线性关系近似为 $y = -1.05(x\%) + 4.81$.

§11 Hermitian 空间简介

回忆: $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} | x, y \in \mathbb{R}\}$. 设 $z = x + y\sqrt{-1}$. 则 $\bar{z} = x - y\sqrt{-1}$ 是 z 的共轭.

1. 共轭映射 $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是自同构;
2. 设 $z \in \mathbb{C}$. 则 $z\bar{z}$ 是非负实数; $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$;
3. 设 $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, $z_1\bar{z}_1 + \dots + z_k\bar{z}_k \geq 0$; 且

$$z_1\bar{z}_1 + \dots + z_k\bar{z}_k = 0 \iff z_1 = \dots = z_k = 0.$$

4. 设 $f \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$. 则 f 是 $\mathbb{C}[t]$ 中一次多项式的乘积.

记号. 在本节中 V 是 \mathbb{C} 上 n 维线性空间.

§11.1 半双线性型

定义 11.1 设 $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 我们有

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \text{和} \quad f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \bar{\alpha} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \bar{\beta} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的半双线性型.

设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$ 称为 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n)A(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^t.$$

半双线性型 f 称为是 *Hermitian* 型的, 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$. 对 $A \in M_n(\mathbb{C})$, A 的共轭转置是指矩阵 \bar{A}^t , 其中 \bar{A} 是把 A 中元素都取共轭得到的矩阵. 记 A 的共轭转置为 A^* . 如果 $A = A^*$, 则称 A 是 *Hermitian* 型的.

命题 11.2 设 f 是 V 上半双线性型, 矩阵 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$ 是 f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是 Hermitian 型的当且仅当 A 是 Hermitian 型.

注解 11.3 设 f 是 Hermitian 半双线性型. 则 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. 于是, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

定义 11.4 设 f 是 Hermitian 半双线性型. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$, 则称 f 是正定的. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是 Hermitian 型. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 我们有 $\mathbf{x}^t A \bar{\mathbf{x}} > 0$. 则称 A 是正定的.

命题 11.5 设 f 是半双线性型, $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}$ 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是正定的当且仅当 A 是正定的.

§11.2 Hermitian 空间

设 f 是 V 上的正定半双线性型. 则 (V, f) 称为 Hermitian 空间. 通常把 f 记为 $(|)$. 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$,

1. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{z})$ 和 $(\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \bar{\alpha}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \bar{\beta}(\mathbf{x}|\mathbf{z})$;
2. $\overline{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$;
3. $(\mathbf{x}|\mathbf{x})$ 是非负实数且 $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. 定义

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = ((\mathbf{v}_i|\mathbf{v}_j))_{m \times m}.$$

称之为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 的 Gram 矩阵. 矩阵 $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ 是 Hermitian 的.

命题 11.6 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ 线性相关当且仅当

$$\text{rank}(G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)) < m.$$

§11.3 长度、距离和正交

设 V 是 Hermitian 空间.

定义 11.7 设 $\mathbf{x} \in V$. 称 $\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ 是 \mathbf{x} 的长度, 记为 $\|\mathbf{x}\|$. 再设 $\mathbf{y} \in V$. 则 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 称为 \mathbf{x} 到 \mathbf{y} 之间的距离.

定理 11.8 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (Cauchy-Bunyakovski 不等式). 特别地, $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 当且仅当 \mathbf{x}, \mathbf{y} 线性相关.

设 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 则称 \mathbf{x} 是单位向量.

定义 11.9 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$, 则称 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 正交, 记为 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

零向量与任何向量都正交.

引理 11.10 设 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in V$, 其中 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 非零.

(i) $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) 如果 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ 两两正交, 则它们线性无关.

§11.4 单位正交基

设 $\dim(V) = n$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 中两两正交的单位向量. 根据引理 11.10, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 称为 V 的一组单位正交基.

定理 11.11 (*Gram-Schmidt* 正交化) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ 线性无关. 则两两正交的单位向量 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ 使得

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_i \rangle,$$

$i = 1, 2, \dots, k$. 特别地, V 有单位正交基.

§11.5 正交补

定义 11.12 设 $U_1, U_2 \subset V$ 是子空间. 如果对于任意的 $\mathbf{u}_1 \in U_1$ 和 $\mathbf{u}_2 \in U_2$ 我们有 $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$, 则称子空间 U_1 和 U_2 正交, 记为 $U_1 \perp U_2$.

定理 11.13 设 $U \subset V$ 是子空间. 定义 $U^\perp = \{\mathbf{x} \in V \mid \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{u} \perp \mathbf{x}\}$. 则

(i) U^\perp 是子空间且 $U \perp U^\perp$;

(ii) $V = U \oplus U^\perp$ (称 U^\perp 是 U 的正交补).

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

推论 11.14 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.

§12 U -矩阵与 U -等价

记号: 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P.$$

则对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \overline{\vec{P}^{(j)}}.$$

由此得出 $P^t \bar{P} = E$, 进而 $P^* P = E$.

定义 12.1 设 $P \in GL_n(\mathbb{C})$. 如果 $P^* = P^{-1}$, 则称 P 是 U -矩阵. 所有 n 阶 U -矩阵的集合记为 $U_n(\mathbb{C})$.

命题 12.2 集合 $U_n(\mathbb{C})$ 是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的子群.

命题 12.3 设 V 有基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 满足

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) P.$$

再设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in U_n(\mathbb{C})$.

定义 12.4 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. 如果存在 $P \in U_n(\mathbb{C})$ 使得 $B = P^{-1} A P$, 则称 A 与 B U -等价(U -相似), 记为 $A \sim_u B$.

问题. 给定 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 求它在 U 等价下的标准型. 给定 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 判定它们是否 U -等价.

§13 正规算子与正规矩阵

记号: 在本节中 V 是 n 维 Hermitian 空间, 其中 $n > 0$.

定义 13.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果算子 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x}) | \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathcal{B}(\mathbf{y})),$$

则称 \mathcal{B} 是 \mathcal{A} 的伴随算子.

命题 13.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 \mathcal{A} 的伴随算子存在且唯一. 如果 \mathcal{A} 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A , 则其伴随算子在该基下的矩阵等于 A^* .

我们把 \mathcal{A} 的伴随算子记为 \mathcal{A}^* .

定义 13.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 是正规算子. 类似地, 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 如果 $AA^* = A^*A$, 则称 A 是正规矩阵.

命题 13.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, \mathcal{A} 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则 \mathcal{A} 正规当且仅当 A 正规.

定义 13.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 是 Hermitian 算子. 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 是斜 Hermitian 算子.

Hermitian 和斜 Hermitian 算子都是正规算子. 显然, Hermitian 和斜 Hermitian 矩阵 ($A^* = -A$) 都是正规矩阵.

命题 13.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, \mathcal{A} 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则 \mathcal{A} (斜) Hermitian 算子当且仅当 A (斜) Hermitian 矩阵.

定义 13.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 \mathcal{A} 是保内(积)的.

命题 13.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, \mathcal{A} 在 $\mathcal{L}(V)$ 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A . 则下列断言等价

- (i) \mathcal{A} 保内;
- (ii) $A \in U_n(\mathbb{C})$;
- (iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ (保长);
- (iv) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ (保距).

注解 13.9 保内算子也称为 U -算子.

§14 正规矩阵的标准型

引理 14.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则 $\text{tr}(A^*A) = 0 \implies A = O$.

引理 14.2 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k) \times k} & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), \quad \text{其中 } B \in M_k(\mathbb{C}).$$

如果 A 正规, 则 $C = O_{k \times (n-k)}$.

引理 14.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W \subset V$ 是 \mathcal{A} -子空间. 则

(i) W^\perp 也是 \mathcal{A} -子空间;

(ii) \mathcal{A}_W 也是正规算子.

引理 14.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 \mathcal{A} 有一维 \mathcal{A} -不变子空间.

定理 14.5 设 $\mathcal{A} \in V$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 使得 \mathcal{A} 在该基下是对角阵.

推论 14.6 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 正规. 则存在 A 与某个对角矩阵 U -相似.

定理 14.7 (i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ Hermitian. 则 \mathcal{A} 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(ii) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ Hermitian. 则 $A \sim_u \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) 特别地, Hermitian 矩阵和 Hermitian 算子的特征根都是实数.

定理 14.8 (i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 斜 Hermitian. 则 \mathcal{A} 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(ii) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 斜 Hermitian. 则 $A \sim_u \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是零或纯虚数不必两两不同.

(iii) 特别地, 斜 Hermitian 矩阵和斜 Hermitian 算子的特征根都是零或纯虚数.

定理 14.9 (i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是 U -算子. 则 \mathcal{A} 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的复数模长等于 1.

(ii) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 斜 Hermitian. 则 $A \sim_u \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的复数模长等于 1.

(iii) 特别地, U -矩阵和 U -算子的特征根的复数模长都等于 1.

§15 正定算子

定义 15.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ Hermitian. 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$. 则称 \mathcal{A} 是正定算子.

命题 15.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 \mathcal{A} 正定当且仅当它在 V 的单位正交基下的矩阵正定.

推论 15.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 \mathcal{A} 正定当且仅当它的特征根都是正实数.

定理 15.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是半正定算子. 则存在唯一的半正定算子 \mathcal{B} 使得 $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$.

推论 15.5 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定. 则存在唯一的半正定矩阵 $B \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = B^2$ 且 $B \in \mathbb{C}[A]$.

定理 15.6 设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$ 可逆. 则存在唯一的正定矩阵 S 和 U -矩阵 T 使得 $A = ST$.

推论 15.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 则存在唯一的正定算子 \mathcal{S} 和 U -算子 \mathcal{T} 使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$.