中国科学院大学二零二零年春季线性代数期末考试卷

编号：B01GB003Y-B02　名称：线性代数Ⅱ-B　教师：李子明、薛威、张晓晶

姓名:　　　　　　　　**学号:**

注意事项：

1.考试时间为 180 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上.

1. (10分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2.$$

(i) 计算 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵和 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. 计算 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的矩阵.

2. (10分) 设实矩阵 $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) 计算 M 的特征根.

(ii) 判定 M 是否可对角化, 并说明理由.

3. (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. 计算 A 的 Jordan 标准型.

4. (10分) 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间, U 是方程组 $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 的解空间. 计算

(i) U 的一组单位正交基;

(ii) $U^{\perp}$ 的一组单位正交基.

5. (10分) 设对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $t^2(t-2)(t+2)$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP = B$.

6. (10分) 设 V 是 域 F 上的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 在 $\mathcal{A}$ 的某个特征子空间中当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2$.

7. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其特征多项式

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ 两两不同, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^+$.

(i) 设 A 的极小多项式 $\mu_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$. 计算 A 的 Jordan 标准型.

(ii) 设 $\mu_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1 - 1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k - 1}$. 证明: $n_1, \ldots, n_k$ 都大于 1 且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 的几何重数都等于 2.

8. (10分) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{v}$ 是 V 中单位向量. 定义映射:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_{\mathbf{v}}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x} \end{array}.$$

(i) 验证 $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 是 V 上的线性算子且是正交算子.

(ii) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 V 中两个线性无关的单位向量. 证明: 存在 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$ 使得

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

9. (10分) 设 A, B, C 是 n 阶实矩阵. 证明:

(i) 如果 A 是斜对称且可逆的, 则 $A + A^2$ 也可逆;

(ii) 如果 B, C 和 $B - C$ 都是正定的, 则 $\det(B) > \det(C)$.

10. (10分) 设 V 是 域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子. 证明:

(i) 对任意 $f \in F[t]$, $\ker(f(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间;

(ii) 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间, 则对任意 $\mathcal{A}$-不变子空间 U, 存在 $p \in F[t]$ 使得

$$U = \ker(p(\mathcal{A})).$$