中国科学院大学二零二零年春季线性代数期末考试卷

编号：B01GB003Y-B02　名称：线性代数 II-B　教师：李子明、薛威、张晓晶

姓名:　　　　　　　**学号:**

注意事项：

1.考试时间为 180 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

1. (10分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2, \quad \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2.$$

(i) 计算 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵和 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. 计算 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的矩阵.

解. *(i)* $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(A) = 2$.

(ii) 由题意可知

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P}.$$

则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的矩阵是

$$P^{-1}AP \overset{\because P = P^{-1}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

2. (10分) 设实矩阵 $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) 计算 M 的特征根.

(ii) 判定 M 是否可对角化, 并说明理由.

解. *(i)* 特征多项式

$$\chi_M(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ 4 & t-3 & 0 \\ -1 & 0 & t-2 \end{pmatrix} = (t-2)((t+1)(t-3)+4) = (t-2)(t-1)^2.$$

矩阵 M 的特征根是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 2$.

(ii) 直接计算得

$$\dim(V^{\lambda_1}) = 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

于是, λ_1 几何重数是 *1*, 小于其代数重数. 由此可知 M 不可对角化. □

3. (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$. 计算 A 的 Jordan 标准型.

解. 特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}} = (t-a)^2(t-b)$.

情形 *1.* $a \neq b$ 且 $a \neq 0$. 则

$$\operatorname{rank}(A - aE) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} = 2.$$

此时特征根 a, b 得几何重数都等于 1. 我们得到

$$J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

情形 *2.* $a \neq b$ 且 $a = 0$. 则

$$\operatorname{rank}(A - aE) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = 1.$$

此时特征根 a,b 的几何重数等于它们的代数重数. 故 A 可对角化. 我们得到

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

情形 3. $a=b$ 且 $a\neq 0$. 则

$$\operatorname{rank}(A-aE) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

此时特征根 a 得几何重数等于 1, 代数重数等于 3. 我们得到

$$J_A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

情形 4. $a=b=0$ 且 则

$$\operatorname{rank}(A-aE) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

此时特征根 a 得几何重数等于 2, 代数重数等于 3. 我们得到

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (10分) 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间, U 是方程组 $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 的解空间. 计算

(i) U 的一组单位正交基;

(ii) $U^\perp$ 的一组单位正交基.

解. (i) U 的一组基是 $(1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t$. 故 U 的一组单位正交基是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t.$$

(ii) $U^{\perp}$ 的一组基是 $(1,0,0,-1)^t$, $(0,1,1,0)^t$. 故 U 的一组单位正交基是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^t,\quad \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^t.$$

5. (10分) 设对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $t^2(t-2)(t+2)$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP=B$.

解. 特征子空间 V^0 的是方程组

$$\begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解空间. 故 V^0 的一组基是 $(1,0,0,1)^t$ 和 $(0,1,1,0)^t$. 它的一组单位正交基是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t,\quad \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^t.$$

特征子空间 V^2 是方程组

$$\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ 3x_2-x_3=0 \\ x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

的解空间. 一组基是 $(1,0,0,-1)^t$. 它的单位化向量是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^t.$$

特征子空间 V^{-2} 是方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1-3x_4=0 \end{cases}$$

的解空间. 一组基是 $(0,1,-1,0)^t$. 它的单位化向量是

$$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)^t.$$

于是, 正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

进而 $P^tAP = \mathrm{diag}(0,0,2,-2)$. $\square$

6. (10分) 设 V 是 域 F 上的有限维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子. 再设 λ_1, λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的两个特征根, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 分别是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 在 $\mathcal{A}$ 的某个特征子空间中当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2$.

证明. 直接计算得

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2. \tag{1}$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. 故 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_1}$.

反之, 设 α 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征根 且 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V^{\alpha}$.

情形 1. 设 $\alpha = \lambda_1$. 则 $\mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_1}$. 故 $\lambda_1 = \lambda_2$.

情形 2. 设 $\alpha = \lambda_2$. 则 $\mathbf{v}_1 \in V^{\lambda_2}$. 故 $\lambda_1 = \lambda_2$.

情形 3. 设 $\alpha \neq \lambda_1$, $\alpha \neq \lambda_2$, 注意到 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2}$. 而互不相同的特征根对应的特征子空间是直和. 于是, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. 于是 $\mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_1}$. 故 $\lambda_1 = \lambda_2$. 矛盾. $\square$

7. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其特征多项式

$$\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ 两两不同, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}^+$.

(i) 设 A 的极小多项式 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$. 计算 A 的 Jordan 标准型.

(ii) 设 $\mu_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1-1}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k-1}$. 证明: $n_1, \ldots, n_k$ 都大于 1 且 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 的几何重数都等于 2.

证明. *(i)* 因为 μ_A 无重因子, 所以 A 可对角化. 于是

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k E_{n_k} \end{pmatrix}.$$

(ii) 由加强版的 *Hamilton-Cayley* 定理, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ 都是 μ_A 的根. 于是, $n_1 - 1 > 0$, $\ldots$, $n_k - 1 > 0$. 此时, J_A 中出现的关于 λ_i 的 *Jordan* 块的最大阶是 $n_i - 1$, 而 λ_i 的代数重数是 n_i. 于是, J_A 中还恰有一块 $J_1(\lambda_i)$ 出现. 由此得出, J_A 中恰有两块关于 λ_i 的 *Jordan* 块. 故 λ_i 的几何重数等于 *2*, $i = 1, 2, \ldots, k$. $\square$

8. (10分) 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{v}$ 是 V 中单位向量. 定义映射:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_{\mathbf{v}}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x} \end{array}.$$

(i) 验证 $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 是 V 上的线性算子且是正交算子.

(ii) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 V 中两个线性无关的单位向量. 证明: 存在 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$ 使得

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

证明. *(i)* 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = 2(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v}-(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha(2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{x})+\beta(2(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})+\beta\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}).$$

于是, $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 是线性的.

下面我们证明 $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 是保内的. 我们计算

$$(\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})|\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{y})) = (2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{x}|2(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{y}) \overset{(\mathbf{v}|\mathbf{v})=1}{=} 4(\mathbf{x}|\mathbf{v})(\mathbf{y}|\mathbf{v})-4(\mathbf{x}|\mathbf{v})(\mathbf{y}|\mathbf{v})+(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

因为 $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 保内, 所以 $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}$ 正交.

(ii) 设 $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. 因为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 线性无关, 所以 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 设 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{z}$ 的单位化向量. 我们计算

$$\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 2\frac{(\mathbf{x}|\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y})}{(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{x}+\mathbf{y})} - \mathbf{x} = 2\frac{1+(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{2+2(\mathbf{x}|\mathbf{y})}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathbf{x} = (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad \square$$

9. (10分) 设 A, B, C 是 n 阶实矩阵. 证明:

(i) 如果 A 是可逆的斜对称矩阵, 则 $A + A^2$ 也可逆;

(ii) 如果 B, C 和 $B - C$ 都是正定的, 则 $\det(B) > \det(C)$.

证明. *(i)* 因为 A 可逆, 所以存在正交矩阵 P 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & \\ & N(0,\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & N(0,\beta_k) \end{pmatrix} P.$$

则

$$A^2 = P^t \begin{pmatrix} N(0,\beta_1)^2 & & & \\ & N(0,\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & N(0,\beta_k)^2 \end{pmatrix} P.$$

于是

$$A+A^2 = P^t \begin{pmatrix} N(0,\beta_1)+N(0,\beta_1)^2 & & & \\ & N(0,\beta_2)+N(0,\beta_2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N(0,\beta_k)+N(0,\beta_k)^2 \end{pmatrix} P.$$

注意到

$$N(0,\beta)+N(0,\beta)^2 = \begin{pmatrix} -\beta^2 & -\beta \\ \beta & -\beta^2 \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵. 于是, $A+A^2$ 可逆.

(ii) 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tBP = E, \quad P^tCP = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

因为 C 正定, 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}^+$. 直接计算得

$$P^t(B-C)P = \mathrm{diag}(1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_n).$$

因为 $B-C$ 正定, 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in (0,1)$. 再因为

$$\det(P)^2\det(B) = 1, \quad \det(P)^2\det(C) = \alpha_1\cdots\alpha_n,$$

所以 $\det(B) > \det(C)$. $\square$

10. (10分) 设 V 是 域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子.

(i) 对任意 $f \in F[t]$, $\ker(f(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间;

(ii) 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间, 则对任意 $\mathcal{A}$-不变子空间 U, 存在 $p \in F[t]$ 使得

$$U = \ker(p(\mathcal{A})).$$

证明. *(i)* 设 $\mathbf{x} \in \ker(f(\mathcal{A}))$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 于是, $\mathcal{A}f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 由此得出 $f(\mathcal{A})\mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 即 $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \ker(f(\mathcal{A}))$. 即 $\ker(f(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间.

(ii) 设 V 是 $\mathcal{A}$-循环空间, U 是 $\mathcal{A}$-不变子空间. 由第二章第五讲习题课例 *2.3* 可知, U 是循环子空间. 设 $U = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{u}$. 令 $p(t) = \mu_{\mathcal{A},\mathbf{u}}$. 对任意 $\mathbf{v} \in U$, 存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{v} = f(\mathcal{A})(\mathbf{u})$. 于是,

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{u}) = f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{v} \in \ker(p(\mathcal{A})) \Longrightarrow U \subset \ker(p(\mathcal{A})).$$

设 $d = \deg(p)$. 则 $d = \dim(U)$. 因为 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 也是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\ker(p(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则 $p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. 由此得出 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}|p$. 故 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}) \leq d$. 我们得到 $\dim(\ker(p(\mathcal{A}))) \leq d$. 于是, $U = \ker(p(\mathcal{A}))$. $\square$