第二章小结

§1 线性映射

设 V 和 W 是域 F 上的 n 维 和 m 维线性空间.

1. $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 当且仅当 ϕ 保持线性关系.
   - 典型例子: 零映射, 嵌入, 商映射, 线性函数, 线性同构，投射...
   - 原像线性相关 $\Longrightarrow$ 像线性相关;
   - V 的子空间的像是 W 的子空间, W 的子空间的原像是 V 的子空间;
   - ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$;
   - 线性映射基本定理 I, II.
   - 核像维数定理: $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(V)$;
   - 线性映射的复合仍是线性的.
2. $\mathrm{Hom}(V, W)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构.
   - 线性映射的复合对应矩阵乘法;
   - 通过矩阵的秩定义线性映射的秩, 从而有核像维数定理:

     $$\dim(\ker(\phi)) + \mathrm{rank}(\phi) = \dim(V);$$

   - 两矩阵初等等价当且仅当它们是同一线性映射在不同基底下的矩阵表示.

§2 线性算子的基本性质

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 设 $J_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示的 Jordan 标准型.

1. 典型例子：恒同映射, 数乘映射, 完全正交等方组(关于直和分解的投射, 幂等映射), 幂零映射(导数), ...
2. $\mathcal{A}$ 单射$(\ker(\mathcal{A}) = \{\mathbf{0}\})$ $\iff$ 满射$(\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n)$ $\iff$ 双射.
3. $F[\mathcal{A}]$ 是 F 上的线性空间和交换环.
4. 核核分解与核像分解.

5. $\mathcal{L}(V)$ 和 $\mathrm{M}_n(F)$ 代数同构;

6. 两矩阵相似当且仅当它们是同一线性算子在不同基底下的矩阵表示.

7. 相似不变量

   - 秩, 迹, 行列式;
   - 特征多项式，特征根，极小多项式;
   - 完全相似不变量 I: $\{\mathrm{rank}(f(\mathcal{A}) \mid f \in F[t]\}$;
   - 完全相似不变量 II:

   $$S_{\mathcal{A}} = \{p \in F[t] \mid f \text{ 是 } \chi_{\mathcal{A}} \text{ 或 } \mu_{\mathcal{A}} \text{ 的首一不可约因子}\}$$

   和

   $$\{\mathrm{rank}(f(\mathcal{A})) \mid f \text{ 是 } S_{\mathcal{A}} \text{ 中元素至多到 } n \text{ 次幂}\}.$$

例 2.1 通过 *Jordan* 标准型理解核核分解与核像分解.

(i) $\mathcal{A}$ 没有非平凡的核核分解当且仅当 $J_{\mathcal{A}}$ 中每一个 *Jordan* 块的特征根相同, 即 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}\mathcal{A})$ 只有一个元素;

(ii) $\mathcal{A}$ 有核像分解当且仅当 $J_{\mathcal{A}}$ 中每一个幂零 *Jordan* 块都是 *1* 阶的.

§3 极小多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

1. $\mu_{\mathcal{A}}$ 是零化 $\mathcal{A}$ 的次数最低，首一的非零多项式.

2. 典型例子: 数乘算子的极小多项式是一次的, 幂零算子的极小多项式是 t 的幂次, 可对角化算子的极小多项式的互不相同的一次因子之积,

   $$\mu_{J_n(\lambda)} = (t-\lambda)^n.$$

3. 基本性质: $\mu_{\mathcal{A}}$ 整除零化 $\mathcal{A}$ 的多项式, $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) \le n$, $\dim(F[\mathcal{A}]) = \deg(\mu_{\mathcal{A}})$.

4. $\mu_{\mathcal{A}}|\chi_{\mathcal{A}}$ 且它们的不可约因子相同(加强版的 Hamilton-Cayley 定理).

5. $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n \iff \chi_{\mathcal{A}} = \mu_{\mathcal{A}} \iff V$ 是 $\mathcal{A}$-循环的

6. 通过 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的因式分解和核核分解导出广义特征子空间分解定理

例 3.1 通过 *Jordan* 标准型理解 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$ 成立的条件: $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}} \implies J_{\mathcal{A}}$ 中每个 *Jordan* 块的特征值都不相同.

§4　不变子空间

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$.

1. 子空间 $U\subset V$ 是 $\mathcal{A}$ 不变的当且仅当 $\mathcal{A}(U)\subset U$.

2. 典型例子: $\ker(p(\mathcal{A}))$, $V^\lambda=\ker(\lambda\mathcal{E}-\mathcal{A})$, $\mathrm{im}(p(\mathcal{A}))$, 其中 $p\in F[t]$; $\mathcal{A}$-循环子空间.

3. 降维: 设 U 是$\mathcal{A}$ 不变的. 则

$$\mathcal{A}_U\in\mathcal{L}(U),\quad \mu_{\mathcal{A}_U}|\mu_{\mathcal{A}},\quad \chi_{\mathcal{A}_U}|\chi_{\mathcal{A}}.$$

如果 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间分解, 则

$$\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}},\dots,\mu_{\mathcal{A}_{U_k}}),\quad \chi_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}\cdots\chi_{\mathcal{A}_{U_k}}.$$

设

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{pmatrix},$$

其中 A_i 都是方阵. 则

$$\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{A_1},\dots,\mu_{A_k}),\quad \chi_A=\chi_{A_1}\cdots\chi_{A_k}.$$

设

$$A=\begin{pmatrix}A_1&*&\cdots&*\\&A_2&\cdots&*\\&&\ddots&\vdots\\&&&A_k\end{pmatrix},$$

其中 A_i 都是方阵. 则

$$\chi_{\mathcal{A}}=\chi_{A_1}\cdots\chi_{A_k}.$$

例 4.1 *Jordan* 标准型中的每个 *Jordan* 块对应着 $\mathcal{A}$ 在一个不可分子空间上限制算子的矩阵表示. 这些不可分子空间的直和是整个空间.

§5 特征向量、特征值和特征多项式

1. 计算特征向量、特征值和特征多项式.

   - 计算 χ_A;
   - 计算 χ_A 的根
   - 对每个根 λ 计算 $V^\lambda = \ker(\lambda E - A)$ 的一组基.

2. 特征子空间的直和性质、几何重数与代数重数的性质.

3. 可对角化算子的五个判别法.

   - n 个线性无关的特征向量;
   - 特征子空间的(直)和张成整个空间;
   - 上述结论之维数版;
   - 特征多项式在 F 上分解为一次多项式之积且每个特征根的几何重数等于代数重数;
   - 极小多项式是一次多项式之积且重数都是 1.

4. Hamilton-Cayley 定理及其加强版.

例 5.1 • *算子 $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当 J_A 中所有 Jordan 块的阶都等于 1;*

- *通过 Jordan 标准型理解 Hamilton-Cayley 定理及其加强版: $J_{\mathcal{A}}$ 中每个 Jordan 块 $J_{d_i}(\lambda_i)$ 的极小多项式和特征多项式都等于 $(t-\lambda_i)^{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 于是,*

  $$\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mathrm{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots, (t-\lambda_k)^{d_k}) | (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k} = \chi_{\mathcal{A}}(t),$$

  且二者的不可约因子都是 $t-\lambda_1, \ldots, t-\lambda_k$ 中的两两不同的多项式.

§6 循环子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

1. 循环子空间的表示: $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = \{f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) | f \in F[t]\}$.

2. 循环典型例子: $\mathbb{R}[x]_n$ 是 $\mathcal{D}$-循环的. 如果可对角化算子 $\mathcal{A}$ 的特征根两两不同, 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的.

3. 循环子空间的维数: $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}) = \deg\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \le \deg\mu_{\mathcal{A}}$.

4. 循环子空间的循环基: $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$, 其中 $d = \deg\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}$.

5. V 是循环(子)空间的判定准则: $\mu_{\mathcal{A}}$ 的次数等于 n 或 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$.

注解 6.1 *如例 3.1 所示, V 是 $\mathcal{A}$ 循环的当且仅当 $J_{\mathcal{A}}$ 中 Jordan 块的特征值两两不同.*

§7 直和分解

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

1. V 是 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和(由此得出加强版的 Hamilton-Cayley 定理) .

2. V 中每个 $\mathcal{A}$ 不变子空间都是循环的, 其限制算子的极小多项式是某个不可约多项式的幂次.

注解 7.1 *第 2 点对应于 $J_{\mathcal{A}}$ 中每个 Jordan 块的极小多项式等于特征多项式且它们是某个一次多项式的幂次.*

§8 Jordan 标准型

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $F = \mathbb{C}$.

1. 设 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{V_i}$, $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}, \chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}$, 则存在 $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $d_i \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mu_i = \chi_i = (t-\lambda_i)^{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

2. 利用 μ_i 的特殊形式可在 V_i 中选取一组基使得在该基下 $\mathcal{A}_i$ 的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$ (Jordan 块), 从而 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

(Jordan 标准型).

3. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$. 则 Jordan 块 $J_\ell(\lambda_i)$ 在 $J_{\mathcal{A}}$ 中出现的次数(重数)等于

$$\operatorname{rank}((\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{\ell-1}) + \operatorname{rank}((\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{\ell+1}) - 2\operatorname{rank}((\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{\ell}).$$

4.
$$J_{\mathcal{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k E_{d_k} \end{pmatrix}}_{\text{对角}} + \underbrace{\begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}}_{\text{幂零}}.$$

例 8.1 • 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 λ 的代数重数等于 $J_{\mathcal{A}}$ 中 λ 出现的次数;

• λ 的几何重数等于以 λ 为特征根的 *Jordan* 块的个数;

• λ 在 $\mu_{\mathcal{A}}$ 中的重数等于以 λ 为特征根的 *Jordan* 块的最大阶数.

注解 8.2 第 *4* 点对应于 *Jordan-Chevalley* 定理中的分解 $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$.

§9 矩阵相似

设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

1. 判定矩阵相似的两个判定法则.
2. 典型例子: $A \sim_s A^t$. 如果 $\mathrm{spec}_F(A) = \{1\}$, 则 $A \sim_s A^{-1}$.

“ 关于矩阵, 先看它的 Jordan 标准型. ”