第二次作业：

1. 证：

$\because \left(\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}\right)' = (f_1(x)f_4(x) - f_2(x)f_3(x))' = f_1'(x)f_4(x) + f_1(x)f_4'(x) - f_2'(x)f_3(x) - f_2(x)f_3'(x)$

$\left(\begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4(x) \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}\right) = f_1'(x)f_4(x) - f_2(x)f_3'(x) + f_1(x)f_4'(x) - f_2'(x)f_3(x)$

$\therefore$ 等式成立

2. A是有限集，$f: A \to A$ 映射，证明：f为单射当且仅当f为满射.
①

证："$\Longrightarrow$" 若f为单射，下证f为满射.

$\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 因此 $|A| = |\mathrm{Im} f|$.

因为 $\mathrm{Im} f \subset A$，且 $|A|$ 有限，所以 $\mathrm{Im} f = A$. 即f是满射.
②

"$\Longleftarrow$" 若f为满射，下证f为单射.

(反证法) 假设f不是单射，即 $\exists\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ 但 $f(x_1) = f(x_2)$.

因为 $|A|$ 有限，所以 $|A| > |\mathrm{Im} f|$. 这与f是满射 $(\mathrm{Im} f = A)$ 矛盾. 因此
③
f是单射.

注：① "当且仅当" 意思是 "等价". 即 "$\Longleftrightarrow$"

在证明此类结论时，一般是证明 "左边 $\Rightarrow$ 右边" 成立，"右边 $\Rightarrow$ 左边" 成立即可，写法可参考上述证明中的写法 ("$\Longrightarrow$", "$\Longleftarrow$")

② $|A| = |\mathrm{Im} f|$, $\mathrm{Im} f \subset A \xrightarrow{|A|\text{有限}} \mathrm{Im} f = A$.

若 $|A|$ 是无穷集 (无限集)，则上述结论不一定成立.

例：$A = \mathbb{Z}$ (整数集). $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longrightarrow 2n$，则 $\mathrm{Im} f$ 是所有偶数的集合.

有 $|\mathbb{Z}| = |\mathrm{Im} f|$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{Z}$, 但 $\mathrm{Im} f \neq \mathbb{Z}$

这个例子说明整数集和所有偶数组成的集合的势是相同的.

当集合是无限集时，是会出现集合与子集的势相同的情况。

若 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 类似可说明整数集和所有奇数组成的集合的势相同。
$n \to 2n-1$.

③ f 不是单射 $\xrightarrow{|A|\text{有限}}$ $|A| > |\mathrm{Im} f|$.

若 A 是无限集，则上述结论不一定成立。

例：$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots\}$ 下一个数是上一个数的两倍。

$f: A \longrightarrow A$ 使得 $\forall x \in A$. $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \searrow & \\ & & 1 \\ 2 & \nearrow & \\ 4 & \longrightarrow & 2 \\ 8 & \longrightarrow & 4 \\ 16 & \longrightarrow & 8 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

这里 f 不是单射，但 $|A| = |\mathrm{Im} f|$. ($\because \mathrm{Im} f = A$)

由②③中的例子可知，当 A 是无穷集（无限集）时，结论"f 为单射当且仅当 f 为满射"是不成立的。

3. $f: A \longrightarrow B$ 映射．证明：

(1) f 为单射 $\Longleftrightarrow$ 存在 $g: B \to A$ 使得 $g \circ f = 1_A$.

证："$\Longrightarrow$" $f: A \longrightarrow B$ 单射，下面构造 $g: B \longrightarrow A$ 使得 $g \circ f = 1_A$.
$x \longmapsto f(x)$

$\forall y \in B$. 若 $y \in \mathrm{Im} f$，即 $\exists x \in A$ 使得 $y = f(x)$. 令 $g(y) = x$.

若 $y \notin \mathrm{Im} f$. 令 $g(y) = x'$，x' 为 A 中任意元素。

即：$g: B \longrightarrow A$ （由构造过程可知 g 不唯一）

$y = f(x) \in \mathrm{Im} f \longmapsto x$

$y \notin \mathrm{Im} f \longmapsto x'$. ($A$ 中任意元素).

因此 $\forall x \in A$，$g \circ f(x) = g(f(x)) = x$ $\therefore g \circ f = 1_A$.

"$\Longleftarrow$" $\exists g: B\to A$ 使得 $g\circ f = 1_A$. 下证 $\underset{注}{\underline{f\text{是单射}}}$.

$\forall x_1, x_2\in A$. 且 $f(x_1)=f(x_2)$. 有 $g\circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g\circ f(x_2)$.

因为 $g\circ f = 1_A$. 所以 $x_1 = x_2$. 因此 f 是单射.

注：f 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2\in A$. $x_1\neq x_2$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in A$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$. 则 $x_1 = x_2$.

(2) f 为满射 $\Longleftrightarrow$ 存在 $h: B\to A$, 使得 $f\circ h = 1_B$.

证："$\Longrightarrow$" f 是满射. 即. $\forall y\in B$. $\exists x\in A$. 使得 $y = f(x)$.

构造 $h: B \longrightarrow A$. 即 $h(y) = x$. 其中 $\underset{\smile}{x}\in f^{-1}(\{y\})$

$y=f(x) \longmapsto x$.

(x 取 y 在 f 下的原像集中任一元素即可)

因此. $\forall y\in B$. $f\circ h(y) = f(h(y)) = f(x) = y$. 即 $f\circ h = 1_B$.

"$\Longleftarrow$" $\exists h: B\to A$, 使得 $f\circ h = 1_B$. 下证 $\underset{注}{\underline{f\text{为满射}}}$

$\forall y\in B$, $f\circ h(y) = f(h(y)) = y$. 其中 $h(y)\in A$ 即为 y 在 f 下的原像. 因此 f 是满射.

注：f 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\forall y\in B$. $\exists x\in A$ 使得 $f(x) = y$.

定义：$f: A\to B$, $g: B\to A$. 映射.

如果 $f\circ g = 1_B$, 那么 f 叫作 g 的左逆, 而 g 叫作 f 的右逆.

由习题3可得以下结论：

① f 为单射 $\Longleftrightarrow$ f 有左逆； f 为满射 $\Longleftrightarrow$ f 有右逆

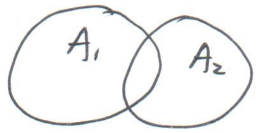
② $f\circ g = 1_B$ $\Rightarrow$ f 是满射, g 是单射.

4. 对有限集合 $A_1,\cdots,A_n$ 证明

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$ (容斥原理)

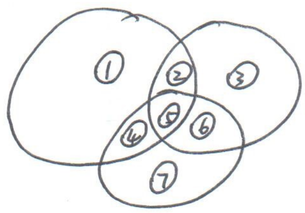
举例：$n=2$. $|A_1\cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$



$n=3$ $|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - (|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)$

$+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

~~右边 = ①+②+④+⑤+⑦~~



韦恩图.

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数方法称为容斥原理.

证明：(归纳法).

$n=2$, $|A_1\cup A_2| = |A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$ 成立.

假设 $n=s$ 时 等式成立.

当 $n=s+1$ 时.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{s+1}A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cup A_{s+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right| + |A_{s+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right)\cap A_{s+1}\right|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{s}A_i\right| + |A_{s+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{s}(A_i\cap A_{s+1})\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{s}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le s}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le s}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \cdots + (-1)^{s-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s|$$

$$+|A_{s+1}| - \Big(\sum_{i=1}^{s}|A_i\cap A_{s+1}| - \sum_{1\le i<j\le s}|A_i\cap A_j\cap A_{s+1}| + \cdots + (-1)^{s-2}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{s-1}\le s}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{s-1}}\cap A_{s+1}|$$

$$+(-1)^{s-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s\cap A_{s+1}|\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{s+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le s+1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le s+1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \cdots + (-1)^{s}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{s+1}|$$

其中 $\sum_{1\le i<j\le s}|A_i\cap A_j| + \sum_{i=1}^{s}|A_i\cap A_{s+1}| = \sum_{1\le i<j\le s+1}|A_i\cap A_j|$

$\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le s}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \sum_{1\le i<j\le s}|A_i\cap A_j\cap A_{s+1}| = \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le s+1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|$

$\vdots$

$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s| + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{s-1}\le s}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{s-1}}\cap A_{s+1}| = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le s+1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_s}|$

所以当 $n=s+1$ 时，等式成立．

因此 $\forall n\in\mathbb{Z}^+, n\ge 2$．等式均成立．

5. (1) $f: X\to Y$，$A, B\subset X$．证明 $f(A\cup B)\underset{注}{=}f(A)\cup f(B)$．

证："$\supset$" $\because A, B\subset A\cup B$ $\therefore f(A), f(B)\subset f(A\cup B)$．

因此 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$．

"$\subset$" $\forall y\in f(A\cup B)$．$\exists x\in A\cup B$ 即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 使得 $y=f(x)$．

若 $x\in A$，则 $f(x)\in f(A)$；若 $x\in B$，则 $f(x)\in f(B)$，因此

$y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$．即．$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$

由此可得 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$．

注：证明两个集合相等，例 $A=B$．一般是证明双边包含关系．

即．$A\subset B$：$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$

$A\supset B$：$\forall y\in B\Rightarrow y\in A$．

或者可以直接看出包含关系．

(2). $f: X\to Y$．任意 $A, B\subset X$．证明 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

并且．等号成立当且仅当 f 是单射．

先证 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

法一: $\because A\cap B\subset A \quad \therefore f(A\cap B)\subset f(A)$
$\because A\cap B\subset B \quad \therefore f(A\cap B)\subset f(B)$
$\Big\}\Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

法二: $\forall y\in f(A\cap B)$, $\exists x\in A\cap B$ s.t. $y=f(x)$.

因此 $y=f(x)\in f(A)$ ($\because x\in A$)
$y=f(x)\in f(B)$ ($\because x\in B$)
$\Big\}\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.
即 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

再证: $\forall A,B\subset X$. $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B) \iff f$是单射.

(或者 $\forall A.B\subset X$ $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B) \iff f$是单射)

"$\Longleftarrow$" 只需证 $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$.

$\forall y\in f(A)\cap f(B)$. $\exists x_1\in A$, $x_2\in B$ 使得 $y=f(x_1)=f(x_2)$

$\because f$是单射 $\therefore x_1=x_2\in A\cap B$. 即 $y=f(x_1)\in f(A\cap B)$

因此 $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$

"$\Longrightarrow$" ② $\forall x_1,x_2\in X$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$. 令 $A=\{x_1\}$, $B=\{x_2\}$.

则 $y=f(x_1)=f(x_2)\in f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$

即 $y\in f(A\cap B)$. 所以 $\exists x\in A\cap B$ ~~s.t.~~ 使得 $y=f(x)$.

因此 $x=x_1=x_2$. $\therefore f$是单射.

注: ① f不是单射时, 可能会出现 $f(A\cap B)\subsetneqq f(A)\cap f(B)$ 真包含.

例 $f: X\longrightarrow Y$
$1\mapsto 1$
$2\mapsto 2$
$3\mapsto 2$

$A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$

$f(A\cap B)=f(2)=2\subsetneqq f(A)\cap f(B)=\{1,2\}$

② 必须是任意 $A,B\subset X$, $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$, 才能推出 f是单射.

例 $f: X\longrightarrow Y$
$1\mapsto 1$
$2\mapsto 2$
$3\mapsto 3$
$4\mapsto 3$

$A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$

$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)=\{2\}$ 但 f不是单射.

第三次作业

1. 令S为非空集合，R为S上一个二元关系，证明：R为等价关系当且仅当

(1) $\forall a\in S$，aRa；

(2) aRb且$bRc \Rightarrow cRa$。

证：$\Rightarrow$ 因为R是等价关系，由自反性可知(1)成立。

(2) $aRb, bRc \xrightarrow{\text{传递性}} aRc \xrightarrow{\text{对称性}} cRa$。

因此(2)也成立。

$\Leftarrow$ (1)、(2)成立，证明R是等价关系。

(1)说明自反性成立。

(2) $aRb, bRc \Rightarrow cRa$。令$c=b$，则$aRb, bRb \Rightarrow bRa$。

即$aRb \Rightarrow bRa$，对称性成立。

由$aRb, bRc \Rightarrow cRa \Rightarrow aRc$可知传递性也成立。

$\therefore R$是等价关系

2. 令S, T为两个非空的集合，且$|S|=m$，$|T|=n$，问

(1) S到T可建立多少个映射？

(2) S到T可建立满射、单射、双射的条件各是什么？各能建立多少个？

证：(1) 任意给定S中元素，该元素映到T的方式都有n种

故S到T可建立映射：n^m个。

(2) 满射条件：$m\geq n$。

单射条件：$m\leq n$　　单射个数：$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}=A_n^m$

（S中第一个元素映到T有n种选择，第二个有$n-1$种选择……第m个有$n-m+1$种选择）

双射条件：$m=n$。　　双射个数：$n!=m!$

（S中第一个元素映到T有n种选择，第二个有$n-1$种选择……第m个有且有1种选择）

满射个数：(容斥原理)

$|S|=m$，$|T|=n$，$m\geq n$．设 $T=\{t_1,\cdots,t_n\}$．I是从S到T的非满射的映射的集合

则从S到T的满射的个数为 $n^m-|I|$．

设 $I_i=\{f:S\to T \mid t_i\notin \mathrm{Im}f\}$

则 $I=I_1\cup\cdots\cup I_n$．

根据容斥原理．

$$|I|=\sum_{i=1}^{n}|I_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|I_i\cap I_j|+\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}|I_{i_1}\cap\cdots\cap I_{i_k}|+\cdots+(-1)^{n-1}|I_1\cap\cdots\cap I_n|$$

注意到 $I_{i_1}\cap\cdots\cap I_{i_k}=\{f:S\to T \mid t_{i_1},\cdots,t_{i_k}\notin \mathrm{Im}f\}$

是从 S到 $T\setminus\{t_{i_1},\cdots,t_{i_k}\}$ 的所有映射的集合．

于是 $|I_{i_1}\cap\cdots\cap I_{i_k}|=(n-k)^m$

从而 $\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}|I_{i_1}\cap\cdots\cap I_{i_k}|=\binom{n}{k}(n-k)^m$

于是 $|I|=\binom{n}{1}(n-1)^m-\binom{n}{2}(n-2)^m+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^m$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m$$

故满射个数为

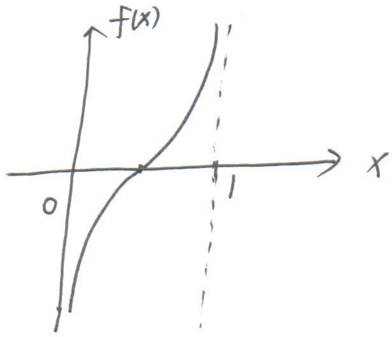
$$n^m-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)^m$$

$$=n^m+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m$$

3. 设 $x\in(0,1)$，证明 $f(x)=\tan(\pi(x-\frac{1}{2}))$ 为 $(0,1)$ 区间到实数轴的一个双射.

图像： $x\in(0,1)$，$\pi(x-\frac{1}{2})\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



严格证明：$f'(x)=\dfrac{\pi}{\cos^2(\pi(x-\frac{1}{2}))}>0$ ∴ $f(x)$在$(0,1)$内严格递增

即如果 $x_1,x_2\in(0,1)$，$x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，因此f是单射.

又因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$，所以$f$是满射.

（学完连续和导函数自然就会了）.

4. 设 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$$f:[0,2\pi]\longrightarrow C$$
$$\theta\longmapsto(\cos\theta,\sin\theta)$$

且 $\sim_f$ 是由映射f诱导的等价关系（见第三讲定理5.17(i)）

证明：(1) $\forall\alpha\in(0,2\pi)$，关于$\sim_f$的等价类 $\bar{\alpha}=\{\alpha\}$.

(2) $\bar{0}=\{0,2\pi\}$.

（注：这习题说明 $[0,2\pi]/\sim_f$ 把$[0,2\pi]$"粘合"成一个圆）

证：~~(1)~~ $\alpha\sim_f\beta \iff f(\alpha)=f(\beta)$. $\forall\alpha,\beta\in[0,2\pi]$

(1) $\forall\alpha,\beta\in(0,2\pi)$，若$f(\alpha)=f(\beta)$，即 $\begin{cases}\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta \text{ 或 } \alpha+\beta=2\pi\\ \sin\alpha=\sin\beta\Rightarrow\alpha=\beta \text{ 或 } \alpha+\beta=\pi \text{ 或 } \alpha+\beta=3\pi\end{cases}$

因此 $\alpha=\beta$，则 $\bar{\alpha}=\{\alpha\}$

(2) 首先，$f(0)=f(2\pi)=(1,0)$ ∴ $\{0,2\pi\}\subset\bar{0}$

其次，$\forall\alpha\in(0,2\pi)$，$\cos\alpha\neq1\Rightarrow f(\alpha)\neq(1,0)$ ∴ $\{0,2\pi\}=\bar{0}$

5. 计算置换的乘积：

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

注意：从右往左看.