第五次作业：

1. 若p是素数，则$\forall n\in\mathbb{Z}$，有$p\mid n^p-n$.（费马小定理）

证：(1) $p=2$，$n^2-n=n(n-1)$，显然$2\mid n^2-n$. $\forall n\in\mathbb{Z}$都成立.

(2) $p\neq 2$，即p是奇素数，此时分两步证明结论.

i) 首先用数学归纳法证明. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$p\mid n^p-n$.

$n=1$时，$n^p-n=0$. 显然成立.

假设$n=k$时，有$p\mid k^p-k$.

当$n=k+1$时，$(k+1)^p-(k+1)=k^p+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}k+1-(k+1)$

$$=k^p-k+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}k$$

已知$p\mid\binom{p}{1}$，…，$p\mid\binom{p}{p-1}$.（第五周讲义例7.17）

由归纳假设可知$p\mid k^p-k$，因此$p\mid(k+1)^p-(k+1)$.

因此，$\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$p\mid n^p-n$.

ii) $n=0$. 显然有$p\mid n^p-n$.

下证若$n\in\mathbb{Z}$，$n<0$. 则$p\mid n^p-n$.

$n^p-n=-(-n)^p-n=-((-n)^p+n)=-((-n)^p-(-n))$.

此时$-n\in\mathbb{Z}^+$，由i)的结论可知$p\mid(-n)^p-(-n)$，故$p\mid n^p-n$.

综上，$\forall n\in\mathbb{Z}$，$p\mid n^p-n$.

2. 判断$\vec{v_3}$是否是$\vec{v_1},\vec{v_2}$的线性组合.

$\vec{v_3}$是$\vec{v_1},\vec{v_2}$的线性组合$\Leftrightarrow$以$(\vec{v_1},\vec{v_2}\mid\vec{v_3})$为增广矩阵的方程组相容.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-4\\0&-5&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&-12\end{pmatrix}$ 不相容. 故$\vec{v_3}$不是$\vec{v_1},\vec{v_2}$的线性组合

(2) $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\3&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&-5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相容. 故$\vec{v_3}$是$\vec{v_1},\vec{v_2}$的线性组合

且$\vec{v_3}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$

3. $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$，$\vec{v}_3=\begin{pmatrix}19\\18\\17\end{pmatrix}$. 证明 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 两两线性无关，但 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关

证：$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 以 $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解.

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&0\end{pmatrix}$$ 只有零解 $\therefore\ \vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关.

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}1&19\\2&18\\3&17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&19\\0&-20\\0&-40\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&19\\0&-20\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&19\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$ 只有零解 $\therefore\ \vec{v}_1,\vec{v}_3$ 线性无关

$$(\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}3&19\\2&18\\1&17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&17\\2&18\\3&19\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&17\\0&-16\\0&-32\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&17\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$ 只有零解 $\therefore\ \vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性无关.

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}1&3&19\\2&2&18\\3&1&17\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&19\\0&-4&-20\\0&-8&-40\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&19\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 有非零解

$\therefore\ \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关

4. 证明 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in\mathbb{R}^n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1+\vec{v}_2,\ \vec{v}_2+\vec{v}_3,\ \vec{v}_1+\vec{v}_3$ 线性无关.

证："$\Rightarrow$" 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$. s.t. $\alpha_1(\vec{v}_1+\vec{v}_2)+\alpha_2(\vec{v}_2+\vec{v}_3)+\alpha_3(\vec{v}_1+\vec{v}_3)=\vec{0}$. 下证 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=$

即 $(\alpha_1+\alpha_3)\vec{v}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v}_2+(\alpha_2+\alpha_3)\vec{v}_3=\vec{0}$.

因为 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性无关的. 所以 $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\\alpha_1+\alpha_2=0\\\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{cases}$ $\therefore\ \vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_2+$ $\vec{v}_1+\vec{v}_3$ 线性

(对应系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 故只有零解)

"$\Leftarrow$" 令 $\begin{cases}\vec{w}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2\\\vec{w}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_3\\\vec{w}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_3\end{cases}$，则 $\begin{cases}\vec{v}_1=\dfrac{\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{w}_3}{2}\\\vec{v}_2=\dfrac{\vec{w}_1+\vec{w}_2-\vec{w}_3}{2}\\\vec{v}_3=\dfrac{-\vec{w}_1+\vec{w}_2+\vec{w}_3}{2}\end{cases}$

若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=\vec{0}$.

则 $(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\vec{w}_1+(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\vec{w}_2+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)\vec{w}_3=\vec{0}$.

由于 $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3$ 线性无关. 所以

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\\\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{cases}$$ $\therefore\ \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性无关

[对应系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ∴只有零解]

注：$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}$，则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

5. $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 线性无关，设 $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_1 \neq 0$. 证明：$\vec{u}, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$ 线性无关.

证：设 $\beta, \beta_2, \cdots, \beta_k \in \mathbb{R}$ s.t. $\beta\vec{u} + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k = \vec{0}$. 下证 $\beta = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$.

$\because \vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k$，$\therefore \beta(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k) + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_k\vec{v}_k = \vec{0}$.

即 $\alpha_1\beta\vec{v}_1 + (\alpha_2\beta + \beta_2)\vec{v}_2 + (\alpha_3\beta + \beta_3)\vec{v}_3 + \cdots + (\alpha_k\beta + \beta_k)\vec{v}_k = \vec{0}$

$\because \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$ 线性无关

$$\therefore \begin{cases} \alpha_1\beta = 0 \\ \alpha_2\beta + \beta_2 = 0 \\ \alpha_3\beta + \beta_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k\beta + \beta_k = 0 \end{cases} \xRightarrow{\alpha_1 \neq 0} \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \vdots \\ \beta_k = 0 \end{cases}$$

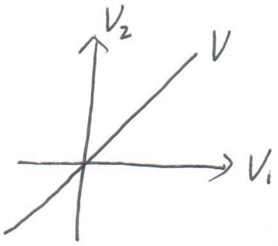
$\therefore \vec{u}, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$ 线性无关.

6. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

(1) 举例说明"分配律" $V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$ 一般不成立.

在 $\mathbb{R}^2$ 中举例：$\mathbb{R}^2$ 的子空间是 $\{\vec{0}\}$，$\mathbb{R}^2$，过原点的直线.

[$\mathbb{R}^2$ 的真子空间的维数只能是 0, 1. 维数为 0 当且仅当子空间是 $\{\vec{0}\}$
维数为 1 就是过原点的直线]



例：$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

先说明：$V_1+V_2=\mathbb{R}^2$.

方法一：显然 $V_1+V_2\subset\mathbb{R}^2$，$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$，其中 $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in V_1$，$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}\in V_2$.

$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V_1+V_2$. 即 $\mathbb{R}^2\subset V_1+V_2$. 因此 $V_1+V_2=\mathbb{R}^2$

方法二：$V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$. 故 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$. 由维数公式可知 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$
$=1+1=2$.

又因为 $V_1+V_2\subset\mathbb{R}^2$ 且 $\dim(V_1+V_2)=\dim(\mathbb{R}^2)=2$. 所以 $V_1+V_2=\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} V\cap(V_1+V_2)=V\cap\mathbb{R}^2=V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \\ V\cap V_1+V\cap V_2=\{\vec{0}\}+\{\vec{0}\}=\{\vec{0}\}\end{array}\right\}\Rightarrow V\cap(V_1+V_2)\neq V\cap V_1+V\cap V_2$$

(2) 当 $V_1\subset V$ 时证明：$V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$.

证："$\subset$" $\forall\ \vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$. 下证 $\vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$.

$\vec{x}\in V$ 且 $\vec{x}\in V_1+V_2$. 则 $\exists\ \vec{v_1}\in V_1$，$\vec{v_2}\in V_2$，s.t. $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$.

$\because V_1\subset V$ $\therefore \vec{v_1}\in V$ $\Rightarrow \vec{v_2}=\vec{x}-\vec{v_1}\in V$. $\Rightarrow \vec{v_2}\in V\cap V_2$.

由 $V_1\subset V$ 可得 $V\cap V_1=V_1$. $\therefore \vec{v_1}\in V_1=V\cap V_1$.

由上可得 $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$，$\vec{v_1}\in V\cap V_1$，$\vec{v_2}\in V\cap V_2$. i.e. $\vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$

"$\supset$" $\forall\ \vec{x}\in V\cap V_1+V\cap V_2$，下证 $\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$.

$\exists\ \vec{v_1}\in V\cap V_1$，$\vec{v_2}\in V\cap V_2$，s.t. $\vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$.

$\because \vec{v_1},\vec{v_2}\in V$ $\therefore \vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\in V$.

$\because \vec{v_1}\in V_1$，$\vec{v_2}\in V_2$. $\therefore \vec{x}=\vec{v_1}+\vec{v_2}\in V_1+V_2$

因此 $\vec{x}\in V\cap(V_1+V_2)$.

综上：$V\cap(V_1+V_2)=V\cap V_1+V\cap V_2$.