第六次作业

1. $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}$ 证以下结论：

(1) $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关；(2) $\vec{v}\in\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle$ 计算系数．(3) 将 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 扩充成 $\mathbb{R}^3$ 一组基．

证：(1) $\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&-4\\0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 只有零解 $\therefore \vec{v_1},\vec{v_2}$ 线性无关．

(2) $\begin{pmatrix}1&3&-5\\2&2&2\\3&1&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&-4&12\\0&-8&24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-5\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=4\\\alpha_2=-3\end{cases}$

$\therefore \vec{v}=4\vec{v_1}-3\vec{v_2}$

(3) $\because \dim\mathbb{R}^3=3$ $\therefore$ 只需找 $\vec{v_3}\in\mathbb{R}^3$ s.t. $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 线性无关即可．

设 $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$．

做Gauss消去 $\begin{pmatrix}1&3&a\\2&2&b\\3&1&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&a\\0&-4&b-2a\\0&-8&c-3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&a\\0&-4&b-2a\\0&0&a+c-2b\end{pmatrix}$

只要 $a+c-2b\neq0$，那么 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 就是线性~~相~~无关的．

注：$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 两两线性无关，无法保证 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ 线性无关（参考第五次作业习题3）

2. $V,W\subset\mathbb{R}^n$ $(n>1)$ 子空间，且 $V\neq W$，$\dim(V)=\dim(W)=n-1$．证明

$\dim(W+V)=n$，$\dim(W\cap V)=n-2$．

证：分析：维数公式．$\dim(W+V)+\dim(W\cap V)=\dim W+\dim V=2n-2$．

$\because V\subset V+W\subset\mathbb{R}^n$ $\therefore \dim V\le\dim(V+W)\le\dim\mathbb{R}^n$ 即 $n-1\le\dim(V+W)\le n$

$\because V\cap W\subset V$ $\therefore \dim(V\cap W)\le n-1$．由于 $\dim(W+V)\le n$ 和维数公式可知

$\dim(V\cap W)\ge n-2$．

因此：$n-1\le\dim(W+V)\le n$，$n-2\le\dim(W\cap V)\le n-1$．

方法一：证明 $\dim(W+V)=n$．如果 $\dim(W+V)=n-1$，则由 $W,V\subset W+V$ 且 $\dim(W)=\dim(V)=n-1$

可得 $W=V=W+V$，矛盾．因此 $\dim(W+V)=n$．由维数公式可得 $\dim(W\cap V)=n-2$

方法二：证明 $\dim(W\cap V)=n-2$．如果 $\dim(W\cap V)=n-1$，则由 $W\cap V\subset W$，$W\cap V\subset V$ 且 $\dim(W)=\dim(V)=n-1$

可得 $W=V=W\cap V$．矛盾．因此 $\dim(W\cap V)=n-2$．由维数公式可得 $\dim(W+V)=n$

3. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$，求下列矩阵的秩：

解：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -39 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -26 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 13 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

或者 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -39 & -3 & -6 & 3 \\ 3 & -26 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ rank $= 2$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rank $= 5$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n} \xrightarrow[\text{最后一行}]{\text{将第一行换到}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$

$a_0 \neq 0$, rank $= n$

$a_0 = 0$, rank $= n-1$

4. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$

$A = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \\ \vec{A}_{m+1} \end{pmatrix}$

$V_r(A) = \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_m \rangle$

$V_r(B) = \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_m, \vec{A}_{m+1} \rangle$

$\operatorname{rank}(A) = \dim(V_r(A))$, $\operatorname{rank}(B) = \dim(V_r(B))$

(1) $V_r(B) = V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$

(2) $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$ 或 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + 1$.

(3) 若 $\operatorname{rank}(A) = k$，且 A_s 是 A 的任意 s 行组成的矩阵，证明 $\operatorname{rank}(A_s) \geq k+s-m$.

证:

(1) "$\subset$" $\forall \vec{v} \in V_r(B)$, $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{v} = \alpha_1 \vec{A}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{A}_m + \alpha_{m+1} \vec{A}_{m+1}$

其中 $\alpha_1 \vec{A}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{A}_m \in V_r(A)$, $\alpha_{m+1} \vec{A}_{m+1} \in \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$ $\therefore \vec{v} \in V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$

因此 $V_r(B) \subset V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$

"$\supset$" $\forall \vec{w} \in V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$. 则 $\exists \vec{v}_1 \in V_r(A)$, $\vec{v}_2 \in \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$ s.t. $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

$\because \vec{v}_1 \in V_r(A)$ $\therefore \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{A}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{A}_m$

$\because \vec{v}_2 \in \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$ $\therefore \exists \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{v}_2 = \alpha_{m+1} \vec{A}_{m+1}$.

因此 $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{A}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{A}_m + \alpha_{m+1} \vec{A}_{m+1} \in V_r(B)$ $\therefore V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle \subset V$

所以 $V_r(B) = V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$.

注: 类似可证 $\langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_m, \vec{A}_{m+1} \rangle = \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_i \rangle + \langle \vec{A}_{i+1}, \cdots, \vec{A}_m, \vec{A}_{m+1} \rangle$ $(1 \le i \le m$

(2) 分析: $V_r(A) \subset V_r(B) = V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$.

$$\Rightarrow \dim(V_r(A)) \le \dim(V_r(B)) \underset{\text{(维数公式)}}{\le} \dim(V_r(A)) + 1.$$

即 $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(A) + 1$.

下面具体分析什么情况下 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$, 什么情况下 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + 1$.

方法一: 设 $\operatorname{rank}(A) = k$. 不妨设 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k$ 是 $V_r(A)$ 的一组基. 其中 $k \le m$.

下面分情况讨论:

① 如果 $\vec{A}_{m+1}$ 是 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k$ 的线性组合, 则 $\vec{A}_{m+1} \in \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k \rangle = V_r(A)$.

$\therefore V_r(B) \subset V_r(A)$, 显然有 $V_r(B) \supset V_r(A)$. 因此 $V_r(A) = V_r(B)$ 即 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}$

② 如果 $\vec{A}_{m+1}$ 不是 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k$ 的线性组合. 则 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k, \vec{A}_{m+1}$ 线性无关

下说明 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k, \vec{A}_{m+1}$ 是 $V_r(B)$ 的一组基.

因为 $\cancel{\forall \vec{v} \in}\, V_r(B) = V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle = \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k \rangle + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle = \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k, \vec{A}_{m+1} \rangle$

~~则 $\exists \vec{v}_1 \in \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k \rangle$, $\vec{v}_2 \in \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$ s.t. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ $\Rightarrow \vec{v} \in \langle \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k, \vec{A}_m$~~

所以 $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_k, \vec{A}_{m+1}$ 是 $V_r(B)$ 的一组基 $\Rightarrow \operatorname{rank}(B) = \dim(V_r(B)) = k+1$

$= \operatorname{rank}(A) + 1$.

方法二：$\dim(V_r(B)) = \dim(V_r(A) + \langle \vec{A}_{m+1} \rangle)$

$$= \dim(V_r(A)) + \dim(\langle \vec{A}_{m+1} \rangle) - \dim(V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle)$$

如果 $\vec{A}_{m+1} = \vec{0}$，则 $\dim(V_r(B)) = \dim(V_r(A))$ i.e. $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$

下考虑 $\vec{A}_{m+1} \neq \vec{0}$. 此时 $\dim(\langle \vec{A}_{m+1} \rangle) = 1$

$\because V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle \subset \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$. $\therefore \dim(V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle) \leq 1$

① 若 $\dim(V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle) = 0$. i.e. $V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle = \{\vec{0}\}$. $(\Rightarrow \vec{A}_{m+1} \notin V_r(A))$

由维数公式可得 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + 1$

② 若 $\dim(V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle) = 1$. i.e. $V_r(A) \cap \langle \vec{A}_{m+1} \rangle = \langle \vec{A}_{m+1} \rangle$ $(\Rightarrow \vec{A}_{m+1} \in V_r(A))$

由维数公式可得. $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + 1 - 1 = \operatorname{rank}(A)$.

综上可得，$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$ 或者 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) + 1$.

(3).

方法一：设 A_{s+l} 是 A_s 中增加 l 行得到的矩阵，则由(2)的结论可知

$$\operatorname{rank}(A_{s+l}) \leq \operatorname{rank}(A_s) + l.$$

[或者由第七周讲义例3.12也可得到：$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$，则 $\operatorname{rank}((A,B)) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$]

$\therefore k = \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(A_s) + m - s \Rightarrow \operatorname{rank}(A_s) \geq k + s - m$.

方法二：设 A_{m-s} 是 A 中去掉 A_s 的行向量后剩余行向量组成的矩阵，则

$$V_r(A) = V_r(A_s) + V_r(A_{m-s}).$$

由维数公式可得.

$$\dim(V_r(A)) \leq \dim(V_r(A_s)) + \dim(V_r(A_{m-s}))$$

则 $k = \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(A_s) + m - s \Rightarrow \operatorname{rank}(A_s) \geq k + s - m$

例题：

1. $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in\mathbb{R}^n$，$k>2$，令

$\vec{w_1}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$，$\vec{w_2}=\vec{v_2}+\vec{v_3}$，$\vec{w_3}=\vec{v_3}+\vec{v_4}$，$\cdots$，$\vec{w_{k-1}}=\vec{v_{k-1}}+\vec{v_k}$，$\vec{w_k}=\vec{v_k}+\vec{v_1}$.

(i) 证明：如果 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关，则 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 也线性相关.

(ii) 当 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性无关时，$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 一定线性无关吗？如果是，请证明；否则，请举出反例.

证：(i) 方法一：令 $V=\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\rangle$. $\because \vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关 $\therefore \dim V<k$.

又 $\because \vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}\in V$. $\therefore \vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 线性相关

注：如果一个子空间的维数小于 k，则它不会含有 k 个线性无关的向量.

方法二：$\because \vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性相关 $\therefore$ 不妨设 $\vec{v_k}\in\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{k-1}}\rangle$

$\because \vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}\in\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{k-1}},\vec{v_k}\rangle=\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{k-1}}\rangle$.

即 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 都是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{k-1}}$ 的线性组合.

$\therefore$ 由线性组合引理可知 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 线性相关.

(ii) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{w_1}+\cdots+\alpha_k\vec{w_k}=\vec{0}$.

则 $\alpha_1(\vec{v_1}+\vec{v_2})+\alpha_2(\vec{v_2}+\vec{v_3})+\alpha_3(\vec{v_3}+\vec{v_4})+\cdots+\alpha_{k-1}(\vec{v_{k-1}}+\vec{v_k})+\alpha_k(\vec{v_k}+\vec{v_1})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_k)\vec{v_1}+(\alpha_1+\alpha_2)\vec{v_2}+(\alpha_2+\alpha_3)\vec{v_3}+\cdots+(\alpha_{k-2}+\alpha_{k-1})\vec{v_{k-1}}+(\alpha_{k-1}+\alpha_k)\vec{v_k}=\vec{0}$.

$\because \vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性无关

$$\therefore \begin{cases}\alpha_1+\alpha_k=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \vdots\\ \alpha_{k-2}+\alpha_{k-1}=0\\ \alpha_{k-1}+\alpha_k=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\alpha_k\\ \alpha_2=\alpha_k\\ \alpha_3=-\alpha_k\\ \vdots\\ \alpha_{k-1}=(-1)^{k-1}\alpha_k\\ \alpha_{k-1}=-\alpha_k\end{cases}$$

① 若 k 是偶数，则 $\alpha_{k-1}=-\alpha_k$.
解空间是1维，其一组基为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\\vdots\\-1\\1\end{pmatrix}$
$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 线性相关

② 若 k 是奇数，由 $\alpha_{k-1}=\alpha_k=-\alpha_k\Rightarrow\alpha_k=0$.
齐次方程组只有零解，$\therefore \vec{w_1},\cdots,\vec{w_k}$ 线性无关

举例：$k=3$，第五周作业习题4

$k=4$，$\underbrace{(\vec{v_1}+\vec{v_2})}_{\vec{w_1}}-\underbrace{(\vec{v_2}+\vec{v_3})}_{\vec{w_2}}+\underbrace{(\vec{v_3}+\vec{v_4})}_{\vec{w_3}}-\underbrace{(\vec{v_4}+\vec{v_1})}_{\vec{w_4}}=\vec{0}\Rightarrow\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3},\vec{w_4}$ 线性相关

2. 对$\mathbb{R}^n$中的向量$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$. 证明：$\mathbb{R}^n=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle \Leftrightarrow \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 线性无关.

证："$\Rightarrow$"（反证法）. 如果$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$线性相关，则$\exists\{\vec{v}_{k_1},\cdots,\vec{v}_{k_d}\}\subsetneq\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\}$ $(d<n)$

构成$\mathbb{R}^n$的一组基. $\therefore \dim(\mathbb{R}^n)=d<n$. 矛盾 $\therefore \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 线性无关.

"$\Leftarrow$" 方法一：$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$线性无关且$\dim(\mathbb{R}^n)=n$. $\therefore \vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$是$\mathbb{R}^n$的一组基

因此 $\mathbb{R}^n=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle$

[注：第六周讲义命题2.3：(ii) $S\subset\mathbb{R}^n$ 设$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_l\in S$线性无关，S极大线性无关组的个数是m，则$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_l$是S极大线性无关组$\Leftrightarrow l=m$]

方法二：显然，$\mathbb{R}^n\supset\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle$. 下证$\mathbb{R}^n\subset\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle$.

$\forall\vec{w}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{w},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 线性相关（$\mathbb{R}^n$中任意n+1个向量线性相关）

则 $\vec{w}\in\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle$. 因此$\mathbb{R}^n=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n\rangle$.（其实证明了$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$是$\mathbb{R}^n$的一组基）

3. 求下列矩阵的秩. $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

(1)
$$\begin{pmatrix}\lambda&\mu&\cdots&\mu&1\\ \mu&\lambda&\cdots&\mu&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ \mu&\mu&\cdots&\lambda&1\\ \mu&\mu&\cdots&\mu&1\end{pmatrix}_{n\times n}\xrightarrow[\text{最后一列乘}-\mu\text{加到前}n-1\text{列}]{\text{做列变换}}\begin{pmatrix}\lambda-\mu&0&\cdots&0&1\\ 0&\lambda-\mu&\cdots&0&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&\lambda-\mu&1\\ 0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

如果$\lambda=\mu$，则 rank $=1$；如果$\lambda\neq\mu$，则 rank$=n$.

(2) $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中$a_{ij}=\min\{i,j\}$.

$n=2$. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad\mathrm{rank}(A)=2$.

$n=3$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad\mathrm{rank}(A)=3$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2&\cdots&2&2\\1&2&3&\cdots&3&3\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&2&3&\cdots&n-1&n-1\\1&2&3&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}_{n\times n}\xrightarrow[\text{后一行减前一行}]{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}_{n\times n}$$ $\quad\mathrm{rank}(A)=n$.

(3) $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 其中 $a_{ij}=\max\{i,j\}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{前一行减后一行}]{\text{行变换}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A)=n$.