第九次作业.

1. 方法一：矩阵相乘定义

$$J_m A=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad AJ_n=\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} \end{pmatrix}$$

方法二：搬运工引理.

$$J_m A=(E_{12}^{(m)}+E_{23}^{(m)}+\cdots+E_{m-1,m}^{(m)})A=E_{12}^{(m)}A+E_{23}^{(m)}A+\cdots+E_{m-1,m}^{(m)}A$$

$$=\begin{pmatrix} \vec{A_2} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{A_3} \\ \vdots \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{A_m} \\ \vec{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{A_2} \\ \vec{A_3} \\ \vdots \\ \vec{A_m} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$AJ_n=A(E_{12}^{(n)}+E_{23}^{(n)}+\cdots+E_{n-1,n}^{(n)})=AE_{12}^{(n)}+AE_{23}^{(n)}+\cdots+AE_{n-1,n}^{(n)}$$

$$=(\vec{0},\vec{A^{(1)}},\vec{0},\cdots,\vec{0},\vec{0})+(\vec{0},\vec{0},\vec{A^{(2)}},\cdots,\vec{0},\vec{0})+\cdots+(\vec{0},\vec{0},\vec{0},\cdots,\vec{0},\vec{A^{(n-1)}})$$

$$=(\vec{0},\vec{A^{(1)}},\vec{A^{(2)}},\cdots,\vec{A^{(n-2)}},\vec{A^{(n-1)}}).$$

2. $a,b,c\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{Z}^+$. 证明

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab+mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证：方法一：归纳法.

注：$E_3A=AE_3=A$

方法二：$A=\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m=(E_3+A)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}E_3^{m-k}A^k$

$A^0=E_3$，$A^1=A$，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^k=O_3\ (k\geq 3)$

$$\therefore (E_3+A)^m=E_3+\binom{m}{1}A+\binom{m}{2}A^2=\begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab+mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1

3. $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. $ABC=0$. 证：$rank(A)+rank(B)+rank(C) \le 2n$.

证：由Sylvester不等式可得.

$$rank(AB)+rank(C)-n \le rank(ABC)=0$$

$$rank(A)+rank(B)-n \le rank(AB)$$

$$\Rightarrow rank(A)+rank(B)+rank(C) \le 2n$$

4. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 对称矩阵，$C \in M_n(\mathbb{R})$ 斜对称矩阵. 证：

(1) $(AB)^t = AB \Leftrightarrow AB=BA$.

(2) 若A可逆，$(A^{-1})^t = A^{-1}$

(3) 若C可逆，$(C^{-1})^t = -C^{-1}$

证：已知. $A^t=A$, $B^t=B$, $C^t=-C$.

(1) $\Rightarrow$ $AB=(AB)^t=B^tA^t=BA$.

$\Leftarrow$ $(AB)^t=B^tA^t=BA=AB$.

(2). $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1}$.

(3). $(C^{-1})^t=(C^t)^{-1}=(-C)^{-1}$

$\because (-C)^{-1}(-C) = -(-C)^{-1}C=E$

$\therefore C^{-1}=-(-C)^{-1}$ i.e $(-C)^{-1}=-C^{-1}$.

$\Rightarrow (C^{-1})^t=(-C)^{-1}=-C^{-1}$.

2 !

期中复习

1. 线性方程组

$$L:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$B=(A|\vec{b})$

$L:\ A\vec{x}=\vec{b}$ $\qquad$ L 相容 $\iff rank(A)=rank(B)$

$H:\ A\vec{x}=\vec{0}$. $\qquad$ L 确定 $\iff rank(A)=rank(B)=n$.

对偶定理：$\dim(Sol(H))+rank(A)=n$.

若 L 有解，则 $Sol(L)=\vec{v}+Sol(H)$. $\vec{v}$ 是 L 的一个特解.

求解过程：Gauss 消去法. 做初等行变换 (I, II, III) .

注：① 初等行变换不改变方程组的解 . ② 任何方程组均可通过初等行变换化为阶梯型方程组.
(或 初等行变换可将 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 化为阶梯型矩阵)

2. 集合与映射 .

$f: S\to T$. $\forall x\in S$. $\exists!\, y\in T$ s.t. $f(x)=y$.

像集，原像集，单射，满射，双射，逆映射 . 映射的复合 .

$S'\subset S$. $f(S')=\{f(x)\,|\,x\in S'\}$. $f(S)=\mathrm{Im} f$; $T'\subset T$. $f^{-1}(T')=\{x\in S\,|\,f(x)\in T'\}$. $f^{-1}(T)=S$

3. 等价关系 .

S 非空集合，$\sim$ 是 S 上的二元关系 . 如果满足

(1) 自反性：$\forall x\in S$. $x\sim x$.

(2) 对称性：~~$\forall$~~ 设 $x,y\in S$ 且 $x\sim y$ ，则 $y\sim x$

(3) 传递性：设 $x,y,z\in S$. $x\sim y$ 且 $y\sim z$. 则 $x\sim z$. 则称 $\sim$ 是等价关系 .

4. 带余除法 .

设 $x\in\mathbb{Z}$ ，$m\in\mathbb{Z}^+$. 则 $\exists!\ q,\ r\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ s.t.

$$x=qm+r.$$

$r=rem(x,m)$. x 关于 m 的余数

$q=quo(x,m)$ $\quad$ x 关于 m 的商 .

5. 置换.

$T=\{1,2,\cdots,n\}$. $\sigma: T\to T$ 双射, 称为一个置换.

记为 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$

循环分解: $\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_s$. 不相交循环之积, 设 l_i 为 τ_i 的长度.

[ord(σ)]: σ 的阶 (~~st~~ i.e. $\sigma^k=e$ 的最小正整数 k) 为 $\mathrm{lcm}(l_1,l_2,\cdots,l_s)$.

[ε_σ]: σ 的符号 (i.e. 可分解为奇/偶数个对换之积). $(-1)^{\sum_{i=1}^{s}(l_i-1)}$

6. 整数的算数.

gcd, lcm. 设 $m,n\in\mathbb{Z}^+$, $\exists u,v\in\mathbb{Z}$ s.t. $\gcd(m,n)=um+vn$.

算 gcd: Euclidean 算法.

算 $\gcd(m,n)$, 且 $\gcd(m,n)=um+vn$: Extended Euclidean Algorithm.

算 $\mathrm{lcm}(m,n)$: $\mathrm{lcm}(m,n)=\dfrac{|mn|}{\gcd(m,n)}$

~~prop~~ 定理: $m,n\in\mathbb{Z}$, $\gcd(m,n)=1 \Leftrightarrow \exists u,v\in\mathbb{Z}$ s.t. $um+vn=1$

素数: $p\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$: 因子只有 ±1 和 $\pm p$ (素数有无穷多个).

算术基本定理: $\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$. 都可分解成若干素数之积且不计序唯一.

7. 向量空间

(1) 线性组合: $\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ s.t. $\vec{w}=\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$.

线性相关: $\exists$ 不全为 0 的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ s.t. $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}=\vec{0}$.

线性无关: 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$, 则 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$.

L: $A\vec{x}=\vec{b}$. $A=(\vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(n)}})$. H: $A\vec{x}=\vec{0}$.

L 相容 $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ 是 $\vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(n)}}$ 的线性组合.

H 有非 0 解 $\Leftrightarrow$ $\vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(n)}}$ 线性相关.

命题 1.11：

(1) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}$ 线相 $\Rightarrow \vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_k}$ 线相.

(2) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_i},\cdots,\vec{v_k}$ 线无 $\Rightarrow \vec{v_1},\cdots,\vec{v_i}$ 线无.

(3) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线相 $\Leftrightarrow \exists\, \vec{v_i},\ i\in\{1,\cdots,k\}$ s.t. $\vec{v_i}$ 是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_{i-1}},\vec{v_{i+1}},\cdots,\vec{v_k}$ 线性组合

(4) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线无，$\vec{v},\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线相 $\Leftrightarrow \exists!\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ s.t. $\vec{v}=\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}$.

引理 1.12 (线性组合引理)

$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_l}$ 是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 线性组合，$l>k$，则 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_l}$ 线性相关.

例：$\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关.

(2) 子空间：$\vec{x}+\vec{y}\in U$，$\alpha\vec{x}\in U$.

$U_1, U_2\subset\mathbb{R}^n$ 子空间，则 $U_1\cap U_2$，$U_1+U_2=\{\vec{v_1}+\vec{v_2}\mid \vec{v_1}\in U_1, \vec{v_2}\in U_2\}$ 也是子空间.

$\langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\rangle=\{\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_k\vec{v_k}\mid \alpha_i\in\mathbb{R}\}$ 是包含 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ 最小子空间

i.e. $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in U \Rightarrow \langle\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\rangle\subset U$.

(3) 基与维数

$\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}\overset{\in U}{是}$ U 的一组基：① $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$ 线无.

② $\forall\vec{u}\in U$. $\vec{u}\in\langle\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}\rangle$. $\Rightarrow U=\langle\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}\rangle$.

基的个数称为维数 $\dim(U)$.

基扩充定理：$\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$ 是子空间 U ~~组~~ 中线性无关的向量，则 U 有一组基包含 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_k}$.

维数公式：$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$.

直和：$U\cap W=\{0\} \Rightarrow U+W=U\oplus W, \Leftrightarrow \dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$.

8. 矩阵的秩.

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}\vec{A_1}\\ \vdots\\ \vec{A_m}\end{pmatrix}}_{V_r(A)}=\underbrace{(\vec{A^{(1)}},\cdots,\vec{A^{(n)}})}_{V_c(A)}$$

$\mathrm{rank}(A)=\dim(V_r(A))=\dim(V_c(A))$

计算秩：初等行/列变换.

$\operatorname{rank}(A) \le \min(m,n)$. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}((A\ B)) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

转置：A^t，$(A^t)^t = A$，$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$，$(AB)^t = B^t A^t$.

9. 线性映射.

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$. $\varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\varphi(\vec{x})$. $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

命题 5.6：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线映.

(1). $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线相，则 $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_k)$ 线相

(2) $U \subset \mathbb{R}^n$ 子空间，$\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 子空间，特别地，$\operatorname{im}(\varphi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 子空间

(3) W 是 $\mathbb{R}^m$ 子空间，$\varphi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间，特别地，$\varphi^{-1}(\{\vec{0}\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间，记为 $\ker(\varphi)$.

命题 5.8：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线映，φ 单 $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$.

定理 5.9：$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 一组基，$\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中任意给定 n 向量.

则 $\exists!$ 线映 φ s.t. $\varphi(\vec{v}_j) = \vec{w}_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$. $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{im}(\varphi) = \langle \varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)\rangle \\ \quad = \langle \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n \rangle\end{array}\right.$

定理 5.13（对偶定理）. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线映. $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = n$.

命题 5.17：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线映. U 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间，W 是 $\mathbb{R}^m$ 子空间.

(1) $\dim(U) \geqslant \dim(\varphi(U))$；(2) φ 满，$\dim(\varphi^{-1}(W)) \geqslant \dim(W)$

线性映射与矩阵一一对应：

$\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$：$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 线性映射集合.

$\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longleftrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ 双射.

$\varphi \longmapsto A_\varphi$：$A_\varphi = (\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n))$

$\varphi_A \longleftarrow A$：$\varphi_A(e_j) = \vec{A}^{(j)}$，$j = 1, 2, \cdots, n$.

$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$.

命题6.6：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 线映，在标准基下矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，对应齐次方程组 H.

(1) $im(\varphi) = V_c(A)$. $\dim(im(\varphi)) = rank(A)$. 特别地，$\varphi$满 $\Leftrightarrow$ A行满秩.

(2) $ker(\varphi) = Sol(H)$. $\dim(ker(\varphi)) = n - rank(A)$. 特别地，$\varphi$单 $\Leftrightarrow$ A列满秩.

(3) φ双双 $\Leftrightarrow$ $m=n$ 且 A满秩.

题：$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 计算在标准基下的矩阵，$ker(\varphi)$. $im(\varphi)$ 基与维数.

线性映射的运算引出矩阵的运算：

$\varphi \xrightarrow{对应} A$，$\psi \xrightarrow{对应} B$. $\varphi, \psi \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$\varphi + \psi \longrightarrow A+B$.

$\lambda\varphi \longrightarrow \lambda A$. $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi \in Hom(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^m)$, $\psi \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$.

$\downarrow$ $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ $\downarrow$ $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$.

$\varphi \circ \psi \longrightarrow AB$ (矩阵乘法) $\begin{pmatrix} \text{—}i\text{—} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} \overset{j}{|} \end{pmatrix}_{s\times n} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}_{m\times n}$

10. 矩阵的运算.

定理6.25. $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$ 则

$rank(A) + rank(B) - s \le rank(AB) \le \min(rank(A), rank(B))$

$\downarrow$ Sylvester 不等式

定理6.27：$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$B$ m阶满秩方阵，C是n阶阶满秩方阵，则

$rank(A) = rank(BA) = rank(AC)$.

$M_n(\mathbb{R})$：n阶方阵的集合.
$\widehat{\mathbb{R}_{2}}$

$A \in M_n(\mathbb{R})$.

若 $A^t = A$，称A是对称矩阵. ($A=(a_{ij})$，A对称 $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$)

若 $A^t = -A$，称A是斜对称矩阵. ($A=(a_{ij})$，A斜对称 $\Leftrightarrow$ $a_{ii}=0$, $a_{ij} = -a_{ji}$)

若 $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $A^k = 0$，称A是幂零矩阵.

若 $A^2 = A$. 称A是幂等矩阵.

$A \in M_n(\mathbb{R})$.

可逆矩阵：$\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $AB = BA = E$. 称A可逆，B是A的逆矩阵（唯一）.

定理 7.14：A可逆 $\Leftrightarrow$ A满秩.

推论 7.16：A可逆 $\Leftrightarrow$ $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $AB = E$ 或 $BA = E$.

命题 7.19：$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆.

(1) AB 可逆且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) A^{-1} 可逆且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) A^t 可逆且 $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

E 单位矩阵，$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$，$AE = EA = A$，$E^t = E$. $E^{-1} = E$

矩阵的初等等价.

$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$，若$\exists$ m阶可逆方阵 P 和n阶可逆方阵 Q s.t. $A = PBQ$，则称A与B初等等价.

记为 $A \sim_e B$.

$\sim_e$ 是等价关系：(1) $A = E_m A E_n$.

(2) $A = PBQ \Longrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$.

(3) $A = PBQ$，$B = SCT \Rightarrow A = (PS)C(TQ)$

定理 8.2：$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $A \sim_e B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

初等矩阵：

(1) $$F_{ij}^{(n)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & i & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

E_n的i,j行互换.

$$\left(F_{ij}^{(n)}\right)^2 = E_n$$

(2) $$F_{ij}^{(n)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \alpha & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \ \ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

E_n的第j行通乘α加到i行. $\alpha \in \mathbb{R}$，$i \neq j$.

$$F_{ij}^{(n)}(\alpha)F_{ij}^{(n)}(-\alpha) = E_n$$

(3) $$F_i^{(n)}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \ \ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

E_n第i行乘λ. $\lambda \neq 0$，$\lambda \in \mathbb{R}$.

$$F_i^{(n)}(\lambda)F_i^{(n)}(\lambda^{-1}) = E_n.$$

注：初等矩阵都可逆，逆也是初等矩阵.