

1. 解.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

证明: $\text{rank}(M) = \text{rank}\left(\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(B) + \text{rank}(A)$. $\square$

2. 证明: 记 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix}$

则 $PMQ = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$, 记为 N .

由 $\text{rank}(P) = \text{rank}(Q) = 2n$, $\text{rank}(M) = \text{rank}(PMQ) = \text{rank}(N)$

则 $2n \geq \text{rank}(M) = \text{rank}(N) \geq \text{rank}(A-B) + \text{rank}(A+B) = 2n$.

则 $\text{rank}(M) = 2n$. 即 M 可逆. $\square$

3. 证明

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & -n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n+1} \cdot (-n)^{n-2} \cdot (-1)^{\frac{(n-3)(n-2)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

4. 解. P94. 2. 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n! \quad \square$$

P101. 4. 证明: 原行列式第1列 $\times 1000$, 第2列 $\times 100$, 第3列 $\times 10$, 都加到第4列上.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 1798 \\ 2 & 1 & 3 & 2139 \\ 3 & 2 & 5 & 3255 \\ 4 & 8 & 6 & 4867 \end{vmatrix} = 3! \begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & a_1 \\ 2 & 1 & 3 & a_2 \\ 3 & 2 & 5 & a_3 \\ 4 & 8 & 6 & a_4 \end{vmatrix}, \text{ 则引整除原行列式. } \square$$

P102. 6. 证明: 将 $\det C_n$ 按第 n 列展开.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{2n-1} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} \lambda_n \begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda_{n-1} \end{vmatrix},$$

即 $\det C_n = (-1) \cdot (-1)^{2n-2} \cdot (-1) \det C_{n-2} + 1 \cdot \lambda_n \cdot \det C_{n-1} = \lambda_n \det C_{n-1} + \det C_{n-2}$. $\square$

当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, 记 $\det C_n = a_n$, 则 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

$\{a_n\}$ 是斐波那契数列. $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

5. 证明: 设矩阵 $M = \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $M \in M_{2n}(\mathbb{R})$

$$\text{设矩阵 } C_1 = \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad C_1 M = \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\text{设矩阵 } C_2 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -C & E_n \end{pmatrix}, \quad C_1 M C_2 = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

由 $C_1, C_2 \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $2n \geq \text{rank}(C_1) \geq \text{rank}(E_n) + \text{rank}(E_n) = 2n$

则 C_1 满秩, 同理 C_2 也满秩.

则 $\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) = \text{rank}(M) = \text{rank}(C_1 M C_2)$

$\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(-BC) = \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)$. $\square$

注: 题2.5中, 构造满秩矩阵进行矩阵乘法运算等价于做初等"行"变换(或"列"变换)

$$\text{如 } \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{I})+(\text{II})} \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{II})-[(\text{I})]} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{A(\text{II})+(\text{I})} \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{II})+(-C)(\text{I})} \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

且行变换 $\Leftrightarrow$ 左乘, 列变换 $\Leftrightarrow$ 右乘, 变换前后, 分块矩阵的秩不变.

作业题解析:

1. 用第+周讲义引理10.8的结论.

引理10.8: 设 M 是具有以下四种分块形式之一的矩阵

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

则 $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. 且当 $C=0$ 时等号成立.

2. 其它方法:

方法二: $A+B, A-B$ 可逆. 设 $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $(A+B)P = E_n \Rightarrow A(P+Q) + B(P-Q) = 2E_n$
 $(A-B)Q = E_n \Rightarrow A(P-Q) + B(P+Q) = E_n$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P+Q & P-Q \\ P-Q & P+Q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A(P+Q) + B(P-Q) & A(P-Q) + B(P+Q) \\ A(P-Q) + B(P+Q) & A(P+Q) + B(P-Q) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2E_n & 0_n \\ 0_n & 2E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0_n \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} = E_{2n}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P+Q & P-Q \\ P-Q & P+Q \end{pmatrix}$$

方法三: 证明 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 的列向量线性无关.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \vec{A}^{(n)} \\ \vec{B}^{(n)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \vec{B}^{(1)} \\ \vec{A}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \beta_n \begin{pmatrix} \vec{B}^{(n)} \\ \vec{A}^{(n)} \end{pmatrix} = \vec{0}_{2n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} + \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_n \vec{B}^{(n)} = \vec{0}_n \\ \alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{B}^{(n)} + \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \vec{0}_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1 + \beta_1)(\vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}) + \dots + (\alpha_n + \beta_n)(\vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)}) = \vec{0}_n \\ (\alpha_1 - \beta_1)(\vec{A}^{(1)} - \vec{B}^{(1)}) + \dots + (\alpha_n - \beta_n)(\vec{A}^{(n)} - \vec{B}^{(n)}) = \vec{0}_n \end{cases}$$

$A+B, A-B$ 可逆 ($\Leftrightarrow$ 满秩) $\therefore \vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)}$ 线性无关
 $\vec{A}^{(1)} - \vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} - \vec{B}^{(n)}$ 线性无关

故 $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases}$ $2n$ 个未知数, $2n$ 个方程.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

第1列 第n+1列 $(2n) \times (2n)$

系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & -E_n \end{pmatrix}$

令 $P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix}$ $PA = \begin{pmatrix} E_n & E_n \\ 0 & -2E_n \end{pmatrix}$

[复习: $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 其中 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 如果 A, B 都可逆(满秩), 则 M 可逆(满秩)]

$\therefore \text{rank}(P) = \text{rank}(PA) = 2n$. $\because P$ 满秩. $\therefore \text{rank}(A) = \text{rank}(PA) = 2n$.

故上述齐次线性方程组只有零解.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$

即 $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 列向量线性无关, $\therefore \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ 满秩 ($\Leftrightarrow$ 可逆).

注: $A+B, A-B$ 可逆 $\nRightarrow A, B$ 可逆.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A, B 不可逆.

但 $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 可逆.

3. 复习行列式的定义与性质:

定义: 设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)} \quad n! \text{ 项相加. 记为 } \det(A) \text{ 或 } |A|$$

理解: 取 A 不同行不同列的元素相乘, 再乘以置换的符号, 所有的可能组合相加即为 A 的行列式.

性质: ① 交换 A 中两不同列(行)位置得到 B , 则 $\det(B) = -\det(A)$.

② A 中某列(行)的倍式加到另一列得到 B , 则 $\det(B) = \det(A)$.

③ A 中某列(行)的公因子可以提出来 i.e. $\begin{vmatrix} \lambda a_{1i} \\ \vdots \\ \lambda a_{ni} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{vmatrix} = \lambda |A|$
 特别地, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
 ↑
 某列

④ $\begin{vmatrix} a_{1i} + b_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} + b_{ni} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{vmatrix}$ 对行也有类似性质.
 ↑
 某列

~~③④是因为行列式是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性~~

⑤ 如果 A 中有两列相同, 则 $\det(A) = 0$.

⑥ 如果 A 的某列是其他列的线性组合, 则 $\det(A) = 0$.

⑦ $\det(A) = \det(A^t)$

⑧ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

⑨ $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$, $A, B, C \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$
 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

⑩ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$ 3

计算:

① 通过初等变换将行列式化成上三角或下三角矩阵

上三角和下三角矩阵的行列式是对角线元素乘积

注意在做初等变换时, I: 行列式会出来(-1)的幂次

II: 行列式不变

III: 行列式前乘以某个非0实数

② 按行或列展开

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

↓
按第 i 行展开

$$= \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$$

↓
按第 j 列展开

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

↓
代数余子式

↓
余子式

(去掉第 i 行第 j 列得
到 (n-1) 阶矩阵的行列式)

③ 利用分块矩阵: $A \in M_m(\mathbb{R}), B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| |B|, \quad \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

以上三种方法在计算行列式时可以混合使用

注: ① 已知 $\det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n} = a_1 a_2 \dots a_n$

证:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & a_2 & \\ \vdots & & \ddots \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} \det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_n$$

② Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

4. P01: 如果让第1列出现 1798, 2139, 3255, 4867, 则

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}}_{\text{记为 } |A|} = \frac{1}{1000} \begin{vmatrix} 1000 & 7 & 9 & 8 \\ 2000 & 1 & 3 & 9 \\ 3000 & 2 & 5 & 5 \\ 4000 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000} \underbrace{\begin{vmatrix} 1798 & 7 & 9 & 8 \\ 2139 & 1 & 3 & 9 \\ 3255 & 2 & 5 & 5 \\ 4867 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}}_{\text{记为 } |B|}$$

$$|A| = \frac{1}{1000} |B|, \quad |B| \text{ 第1列可以提出公因子31} \therefore 31 \mid |B|$$

$$\Rightarrow 31 \mid 1000 \cdot |A|. \quad \text{因为31是素数且 } 31 \nmid 1000 \therefore 31 \mid |A|$$

$$[p \text{ 是素数}, a, b \in \mathbb{Z}, p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ 或 } p \mid b]$$

注: $|A| \in \mathbb{Z}$. 这是因为 A 的元素都是整数, 由行列式的定义可得

5.

(1) 复习初等矩阵.

I: $F_{ij}^{(n)}$ 是交换 E_n 中第 i 行和第 j 行得到

II: $F_{ij}^{(n)}(\alpha)$ 是把 E_n 第 j 行通乘 α 加到第 i 行得到, $\alpha \in \mathbb{R}$.

III: $F_i^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 第 i 行通乘 λ 得到, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$F_{ij}^{(n)} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

相当于交换 A 中 i, j 行位置

$$F_{ij}^{(n)}(\alpha) A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ji} + \alpha a_{ji} & \cdots & a_{jn} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}$$

相当于 A 第 j 行乘 α 加到第 i 行.

$$F_i^{(n)}(\lambda) A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

相当于 A 第 i 行乘 λ .

性质: ① 左乘初等矩阵是做行变换, 右乘初等矩阵是做列变换

② 有限次初等(行或列)变换不改变矩阵的秩

(2). 对分块矩阵也有类似的结论 $A, C_i \in M_n(\mathbb{R})$ $E_m = \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$

类似 I. $\begin{pmatrix} O_n & E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 & C_4 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 & C_1 \\ C_4 & C_3 \end{pmatrix}$

M_1 相当于交换 C "两行" 位置

相当于交换 C "两列" 位置

类似 II. $\begin{pmatrix} E_n & A \\ O_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + AC_3 & C_2 + AC_4 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ O_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 + C_1 A \\ C_3 & C_4 + C_3 A \end{pmatrix}$

相当于 C "第二行" 左乘 A 加到 "第一行"

相当于 C "第一列" 右乘 A 加到 "第二列"

类似 III. $\begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ AC_3 & AC_4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O_n \\ O_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 A \\ C_3 & C_4 A \end{pmatrix}$

相当于 C "第二行" 左乘 A

相当于 C "第一列" 右乘 A

A 可逆 $\Rightarrow$ 特别地, 可取 $A = \lambda E_n, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

其中 M_1, M_2, M_3 都是可逆矩阵

$$\left[\begin{array}{l} \text{rank}(M_1) = \text{rank}(E_n) + \text{rank}(E_n) = 2n, \text{ rank}(M_2) = \text{rank}(E_n) + \text{rank}(A) = 2n \text{ (引理 10.8)} \\ M_2 = \begin{pmatrix} E_n & A \\ O_n & E_n \end{pmatrix}, E_n \text{ 可逆} \Rightarrow M_2 \text{ 可逆} \end{array} \right]$$

性质: ① 左乘 M_1, M_2, M_3 是做行变换, 右乘 M_1, M_2, M_3 是做列变换

注意矩阵是乘在左边还是右边, 矩阵乘法没有交换律

② 有限次左乘(或右乘) M_1, M_2, M_3 不改变矩阵的秩

可以从以下两个角度来看:

(i) M_1, M_2, M_3 是有限个初等矩阵的乘积

例如, M_1 是 $\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$ 交换第 i 列和第 $n+i$ 列 ($i=1, \dots, n$) 得到的, $M_1 = \prod_{i=1}^n F_{i, n+i}^{(1)}$

或者 M_1 是可逆矩阵, 可逆矩阵是有限个初等矩阵之积

因此, 左乘 M_1, M_2, M_3 是在做初等行变换, 不改变矩阵的秩

(左)

(右)

6

(ii) M_1, M_2, M_3 满秩, 矩阵乘以满秩矩阵秩不变.

例:

$$\text{习题2: } \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

分析: ① $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{"第一行"加到"第二行"}} \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{"第二列"乘-1加到"第一列"}} \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$

熟练之后可以像初等行列变换一样来做. (注意矩阵是左乘还是右乘)

如: $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \begin{pmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{②}} \begin{pmatrix} A-B & B \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$

习题5: $\begin{pmatrix} E_n & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -C & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -C & E_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加到"第一行"}]{\text{"第二列"左乘A}} \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加到"第一列"}]{\text{"第二列"右乘-C}} \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$