第一次习题课讲义

作业题：

1. 假设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a,b,c\in\mathbb{R}$.

方法一：
$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=0 \\ f(0)=c=1 \\ f(2)=4a+2b+c=0 \end{cases} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad c=1, \ \begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+2b=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \end{cases}.$$

即 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$

方法二：其(1)对应增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_3\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{确定的.}$$

所以(1)等价于

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+3c=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \end{cases}$$

事实上，方法一和方法二本质是一样的，都是"高斯消去法".

2. ① 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 19 \\ 3 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 相容的. 并且~~方程~~非零阶梯型方程个数 = 未定元个数 $\therefore$ 该方程组是确定的.

② 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -2 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$0=8$. 则方程组不相容.

③ 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 19 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & 3 & 5 & -12 \\ 3 & 7 & 7 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & 3 & 5 & -12 \\ 0 & 6 & 10 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -3 & 19 \\ 0 & 3 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组相容．由于非0阶梯型方程个数 $=2<$ 未定元个数 $=3$

∴ 方程不确定．

3．归纳法证明：$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$．

$n=1$．$1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$

假设 $n=k$ 时等式成立．即．$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$．（$k\geq 1, k\in\mathbb{N}$）．

则 $n=k+1$ 时，$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

4．归纳法证明：$(1+h)^n\geq 1+nh$．$h\in\mathbb{Z}^+$．$n\in\mathbb{Z}^+$．（伯努利不等式）．

$n=1$，$1+h=1+h$．

假设 $n=k$ 时成立．即 $(1+h)^k\geq 1+kh$．（$k\geq 1, k\in\mathbb{N}$）

当 $n=k+1$ 时，$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)\geq(1+kh)(1+h)=1+kh+h+kh^2$

$$=1+(k+1)h+kh^2\geq 1+(k+1)h^2$$

事实上，由二项式定理也可以得到该不等式，

$$(1+h)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}h+\binom{n}{2}h^2+\cdots+\binom{n}{n}h^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\geq 1+nh．$$

5．$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$．$(a\neq 0)$．$\begin{cases} A:=b^2-3ac=0 \\ B:=bc-9ad=0 \end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=\frac{-b}{3a}$

方法一：$\begin{cases} b^2-3ac=0 \\ bc-9ad=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=\frac{b^2}{3a} \\ d=\frac{bc}{9a}=\frac{b^3}{27a^2} \end{cases}$．　　c.d由a.b表示出来．

将上述 c.d 代入 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\Rightarrow ax^3+bx^2+\frac{b^2}{3a}x+\frac{b^3}{27a^2}=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{b^2}{3a^2}x+\frac{b^3}{27a^3}\right)=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3=0$$

$\Rightarrow x=-\frac{b}{3a}$ 是 $f(x)=0$ 的三重根．

方法二：令 $y=x+\frac{b}{3a}$，即 $x=y-\frac{b}{3a}$，代入 $f(x)$ 可得

$$a\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3a}\right)+d$$

$$=ay^3+\frac{3ac-b^2}{3a}y+\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$$

其中 $2b^3-9abc+27a^2d=2b(b^2-3ac)-3abc+27a^2d$

$$=2b(b^2-3ac)-3a\cdot(bc-9ad)$$

$$=2bA-3aB$$

由 $A=B=0$ 可知，上述式子 $=ay^3$.

$\therefore x=-\frac{b}{3a}$ 是 $f(x)=0$ 的三重根.

方法三：$ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3-\frac{b^2}{3a^2}x-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}x+\frac{27a^2d-b^3}{27a^3}\right)$$

$$\begin{cases}A=b^2-3ac=0\\ B=bc-9ad=0\end{cases}\Rightarrow c=\frac{b^2}{3a}\Rightarrow\frac{b^3}{3a}-9ad=0\Rightarrow b^3-27a^2d=0.$$

$\therefore ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3$. $\therefore x=-\frac{b}{3a}$ 是 $f(x)=0$ 的三重根.

补充：根与系数的关系.

x_1,x_2,x_3 是 $f(x)$ 3个根.

~~ax^3~~ $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$=a\left(x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}\end{cases}$$

注意：下面两种方法在同学的作业中出现，但并不正确.

若已知 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有3个实根，则下面两种方法正确.

1. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$. 判别式 $\Delta=4b^2-12ac=4A=0$.

∴ $f(x)$ 是单调函数（单调递增或单调递减）

于是 $f(x)$ 与 x 轴只有一个交点. $\Rightarrow$ $f(x)=0$ 有一个实根，并不能说有三重实根.

例子：$f(x)=(x^2+1)(x+1)=x^3+x^2+x+1$ $\Rightarrow$ 根 $x_1=-1$，$x_2=i$，$x_3=-i$.

其中 $i^2=-1$（i 是虚数单位）

$f'(x)=3x^2+2x+1$

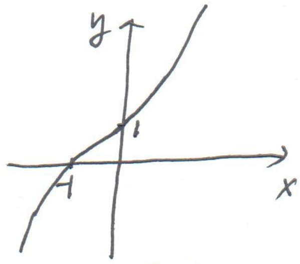
判别式 $\Delta=4-12=-8<0$.

∴ $f(x)$ 严格递增，与 x 轴只有一个交点.

但 $f(x)$ 只有一个实根 -1，还有一对共轭复根 $\pm i$.

[共轭：$a+bi$ 与 $a-bi$ 是共轭的，$a,b\in R$，$i^2=-1$]

图像：



$y=x^3+x^2+x+1$

2. 已知 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$ 由均值不等式可得.

$x_1+x_2+x_3\ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ 等号成立当且仅当 $x_1=x_2=x_3$.

均值不等式成立的前提是 $x_1,x_2,x_3\in R$.

如果已知 $f(x)$ 有三个实根，才可以用均值不等式.

如果假设 $f(x)$ 有三个实根，则由均值不等式，$-\frac{b}{a}\ge 3\sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ $\Rightarrow$ $b^3\ge 27a^2d$ $(a<0)$

或 $b^3\le 27a^2d$ $(a>0)$

由 $\begin{cases} A=b^2-3ac=0 \\ B=bc-9ad=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $b^3=27a^2d$. 即均值不等式中等号成立，这意味着 $x_1=x_2=x_3$

又因为 $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$，所以 $x_1=x_2=x_3=-\frac{b}{3a}$ 是 $f(x)=0$ 的三重实根.

盛金公式.

一元三次方程 ax^3+bx^2+cx+d. $a,b,c,d\in R$, $a\ne 0$

重根判别式 $\begin{cases} A=b^2-3ac \\ B=bc-9ad \\ C=c^2-3bd \end{cases}$

总判别式 $\Delta=B^2-4AC$.

1) $A=B=0$，方程有一个三重实根

2) $\Delta=B^2-4AC>0$，方程有一个实根和一对共轭复根

3) $\Delta=B^2-4AC=0$，方程有三个实根，其中有一个二重根

4) $\Delta=B^2-4AC<0$，方程有三个不相等的实根.

数学归纳法

数学归纳法和反证法是数学证明中两种常用的方法。
很多涉及自然数的命题都可以利用数学归纳法证明。
数学归纳法的基础是：任何自然数的非空集合一定有最小元（Peano公理）

第一数学归纳法：

证明一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$，若 $P(n)$ 满足如下条件

1) 当 $n=n_0$ 时命题 $P(n_0)$ 成立．（一般取 $n_0=0$ 或 1）⟵ 初始情形 induction base

2) 假设 $n=k$ （$k\geq n_0$ 且 $k\in\mathbb{N}$）时命题 $P(k)$ 成立．⟵ 归纳假设 induction hypothesis

3) 证明 $n=k+1$ 时命题 $P(k+1)$ 成立．

则~~命~~题 命 $P(n)$ 对所有 $n\geq n_0$ 均成立．

第二数学归纳法：（完全数学归纳法）

1) 证明 $P(1)$ 成立．

2) 假设对任意给定的 ~~某~~ $k\in\mathbb{N}$，~~有 P(m)~~ 对所有 ~~k≤m~~ $m\leq k$ $P(m)$ 均成立．

3) 证明 $P(k+1)$ 成立．

则 $P(n)$ 对所有自然数 $n\geq 1$ 均成立．

证明第一（第二）数学归纳法的正确性：（以第一为例证明取 $n_0=1$）

（反证法）．假设数学归纳法不对．即 $\exists n\in\mathbb{Z}^+$ s.t. 命题 $P(n)$ 不成立．定义集合 $S=\{s\in\mathbb{Z}^+ \mid P(s)\text{不成立}\}$ 则由假设可知 $S\neq\phi$．由Peano公理集合 S 中有最小元．设为 s_0，则 $s_0\in\mathbb{Z}^+$ 且 $s_0\neq 1$ （$\because P(1)$ 成立）$\therefore s_0>1$

由于 s_0 是使得 $P(s)$ 不成立的最小元 $\therefore P(s_0-1)$ 成立．由归纳法过程可知 $P(s_0)$ 成立．矛盾．$\therefore S=\phi$．即 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，$P(n)$ 成立．▯

第二与第一的区别在于 2). ~~既然~~ 对于 2) 的假设. 很显然第二归纳法包含第一归纳法, 为什么还要用更复杂的假设? 什么时候用第一数学归纳法, 什么时候用第二数学归纳法. 取决于 3) 的证明中需要用到哪些条件, 如果 3) 要用到对所有的 $m\le k$, $P(m)$ 都成立这一条件, 我们便选择第二数学归纳法.

二项式定理.

1. 排列与组合. (回忆).

有 n 个小球分别标号 $1, 2, \cdots, n$.

1) 取出 r 个 $(r\le n)$, 按一定顺序排成一列, 得到不同的排列方式的个数称为排列数. 记为 $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$

2) 取出 r 个 $(r\le n)$, 不计顺序得到的不同的组合方式个数称为组合数

记为 $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

定义 $\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}$. 特别地. 规定 $\binom{n}{0}=1$. $\binom{n}{r}=0$ ($r<0$ 或 $r>n$).

基本性质: 1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

2) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ (刘徽长定理)

3) $\binom{n}{r}\cdot\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{r-k}\cdot\binom{n-r+k}{k}$ $(k\le r\le n)$

2. 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

证明: 组合上看: $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\cdots\cdot(a+b)$ 相当于每个括号中要么选 a, 要么选 b. 拿出来乘在一起.

$\therefore a^i b^{n-i}$ 的系数相当于从 n 个括号中选出 i 个拿 a (自然地剩下 $n-i$ 个拿 b) 的选法个数. 由组合数的定义可知 $a^i b^{n-i}$ 的系数为 $\binom{n}{i}$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

(数学归纳法). $n=1$ 时, $(a+b) = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = b+a$ 等式成立.

假設等式对 $n-1$ 成立，则

$$(a+b)^n=(a+b)^{n-1}(a+b)=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^ib^{n-1-i}\right)(a+b)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^{i+1}b^{n-1-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^ib^{n-i}$$

其中 ① $=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^{i+1}b^{n-1-i}=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}a^{i+1}b^{n-(1+i)}+a^n$

作变量替换 $j=i+1$ 则 ① $=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}a^jb^{n-j}+a^n$

② $=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^ib^{n-i}=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}a^ib^{n-i}+b^n\overset{j=i}{=}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^jb^{n-j}+b^n$

则 $(a+b)^n=$ ①+② $=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}a^jb^{n-j}+a^n+\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^jb^{n-j}+b^n$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}\right)a^jb^{n-j}+a^n+b^n \quad \text{(由班长定理)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}+a^n+b^n$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}\overset{i=j}{=}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

$\therefore$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$.

推论：(1) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$. $(a=b=1)$. (2) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$. $(a=-1, b=1)$