第一次作业.

1. (1) $p = \underbrace{3x^2y^2z^2}_{6次} - \underbrace{x^3}_{3次} + (\underbrace{x^2-xz-xy+yz}_{2次}) - \underbrace{2}_{0次}$

(2) $\deg_x(p)=3$, $\deg_y(p)=2$, $\deg_z(p)=2$, $\deg(p)=6$

2. 设多项式的根为 α, 2α, β.

由 Vieta Th 可知 $\begin{cases} \alpha+2\alpha+\beta=0 \\ \alpha\cdot 2\alpha+\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\beta=-7 \\ \alpha\cdot 2\alpha\cdot\beta=-\lambda \end{cases}$

可得 $\begin{cases} \alpha^2=1 \\ \beta=-3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-3 \end{cases}$ ~~or~~ 或 $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{cases}$ $\quad \alpha\lambda=-2\beta \therefore \lambda=\pm 6$

3. $f=x^3-3x+2$.

$f'=3x^2-3$

由辗转相除法可知 $\gcd(f,f')=x-1$.

$\therefore f$ 的无平方部分为 $\dfrac{f}{\gcd(f,f')} = x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

4. (中国剩余定理)

$\begin{cases} r\equiv 1 \mod 3 \\ r\equiv 2 \mod 5 \\ r\equiv 3 \mod 7 \end{cases}$

$a=1$, $\quad 2\times 3+(-1)\times 5=1$

$b=a+2\times 3\times(2-a)=7$, $\quad 1\times 15+(-2)\times 7=1$

$c=b+1\times 15\times(3-b)=-53$

$r=\mathrm{rem}(-53,105)=52$.

5. 证：设 p 是 f 的重数为 m 的不可约因子，且 $m>2$.

则 $\exists\, g \in \mathbb{Q}[x]$ s.t. $f = p^m g$

故 $f' = m p^{m-1} p' g + p^m g'$

$$= p^{m-1} \underbrace{(m p' g + p g')}_{h}$$

$$f'' = (m-1) p^{m-2} p' h + p^{m-1} h'$$

$$= p^{m-2} [(m-1) p' h + p h']$$

于是 $\gcd(f, f'') \neq 1$ $\rightarrow\leftarrow$

由此可得 $m \le 2$