第二次习题课

一、作业一中的问题

2. 已知多项式 $x^3-7x+\lambda$ 有两个根的比值是2，求 λ.

解：设多项式的根为 α, 2α, β.

由Vieta定理可知 $\begin{cases} \alpha+2\alpha+\beta=0 \\ \alpha\cdot 2\alpha+\alpha\cdot\beta+2\alpha\cdot\beta=-7 \\ \alpha\cdot 2\alpha\cdot\beta=-\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-3\alpha \\ \alpha^2=1. \end{cases}$

即 $\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{cases}$　　故得 $\lambda=\pm 6$.

3. 设 $f=x^3-3x+2 \in \mathbb{Q}[x]$. 求 f 的无平方部分.

解：$f=x^3-3x+2$.　　$f'(x)=3x^2-3$.

求 $\gcd(f,f')=x-1$.　　(因式分解可直接得).

或用辗转相除法：

$f=r_0=x^3-3x+2$.　　$f'=r_1=3x^2-3$.

$r_2=r_0-\frac{1}{3}x r_1=-2x+2$.

$r_3=r_1+\frac{3}{2}x r_2=3x-3$.

$r_4=r_2+\frac{2}{3}r_3=0$.

$\therefore \gcd(f,f')=x-1$.　　故 f 的无平方部分 $\frac{f}{\gcd(f,f')}$ 为 $(x-1)(x+2)$.

4. 求最小正整数 r 满足

$\begin{cases} r\equiv 1 \mod 3 \\ r\equiv 2 \mod 5 \\ r\equiv 3 \mod 7. \end{cases}$

解：$a=1$　　$2\times 3+(-1)\times 5=1$.

$b=a+2\times 3\times(2-a)=7$

$c=b+15\times(3-b)=-53$

$r=\mathrm{rem}(-53,\ 105)=52$

注：$r=r_1$　　$s\equiv r_i \mod m_i$　　$i=1,2,\cdots k-1$.

$u(m_1,\cdots,m_{k-1})+v m_k=1$

$t=s+u(m_1\cdots m_{k-1})(r_k-s)$

$t\equiv s \mod m_i$　　　$r=\mathrm{rem}(t,\ m_1\cdots m_{k-1})$.

5. 设 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]\setminus\mathbb{Q}$，且 $f(x)$ 中不可约因子的最大重数是 m. 证明：若 $\gcd(f,f'')=1$，

则 $m\le 2$，注：f'' 是 f 关于 x 的二阶导数。

证：设 p 是 f 的重数为 m 的不可约因子，且 $m>2$.

则 $\exists\, g\in\mathbb{Q}[x]$ s.t $f=p^m g$

$$f'=mp^{m-1}p'g+p^m g'=p^{m-1}\underbrace{(mp'g+pg')}_{h}$$

$$f''=(m-1)p^{m-2}p'h+p^{m-1}h'$$

$$=p^{m-2}[(m-1)p'h+ph']$$ 则 $\gcd(f,f'')\ne 1$ 矛盾.

$\therefore\ m\le 2$. □

二. 课程内容回顾与补充.

1.1 抽象线性空间：

掌握定义的基础上要注意非线性空间的情形.

1.2. 子空间

eg 1：设 $\tilde{E}=\{f\in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid f$ 是偶函数$\}$. 且 $\tilde{O}=\{f\in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid f$ 是奇函数$\}$

证明：$\tilde{E}$ 和 $\tilde{O}$ 是子空间.

证：我们证明 $\tilde{O}$ 是子空间，设 $f,g\in\tilde{O}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 则对任意

的 $x\in\mathbb{R}$，我们有

$$(\alpha f+\beta g)(-x)=\alpha f(-x)+\beta g(-x)=-\alpha f(x)-\beta g(x)$$

$$=-(\alpha f+\beta g)(x).$$

于是 $\alpha f+\beta g\in\tilde{O}$. 同理可证 $\tilde{E}$ 是子空间. □

定义2：设 $A\in M_n(\mathbb{Q})$. 如果 A 中每一行元素之和以及每一列元素之和都等于一个共同的数，则称 A 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个半幻方. 这个数记为 $\sigma(A)$.

设 A 是半幻方. 如果 A 的主对角线上元素之和以及副对角线上元素之和都等于 $\sigma(A)$，则称 $\sigma(A)$ 是幻方。

$Smag_n(\mathbb{Q})$ 半幻方 $\quad$ $Mag_n(\mathbb{Q})$ 幻方.

eg. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $B=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$6(A)=5$ $\quad$ $6(B)=15$

eg3. 证: $Smag_n(\mathbb{Q})$ 和 $Mag_n(\mathbb{Q})$ 都是 $M_n(\mathbb{Q})$ 的子空间.

证明: 我们来证 $Smag_n(\mathbb{Q})$ 是子空间. 利用解空间法.

设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{Q})$. 则 $A\in Smag_n(\mathbb{Q})$ 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k},\ i=\cancel{1},2,\cdots,n \text{ 和 } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \quad j=1,2,\cdots,n.$$

这是一个关于 a_{ij}, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n$ 个未知数的齐次线性方程组 (共 $2n-1$ 个方程).

而 $Smag_n(\mathbb{Q})$ 是这个方程组在 $M_n(\mathbb{Q})$ 中的解空间.
($n\times n$ 的矩阵看成 n^2 维空间).

对于 $Mag_n(\mathbb{Q})$ 只要再加入两个方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \text{ 和 } \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.$$

□

1.3 直和.

命题4: 设 U 是线性空间, V, W, X, Y 是 U 的子空间. 如果 $U=V\oplus W$ 且 $V=X\oplus Y$,

则 $U=X\oplus Y\oplus W$.

证明: 设 $u\in U$. 则 $\exists!$ 的 $v\in V$ 和 $w\in W$ s.t $u=v+w$, 且 $\exists!$ $x\in X$ 和 $y\in Y$ s.t $v=x+y$. 于是 $\exists!$ $x\in X$, $y\in Y$, $w\in W$. s.t.

$u=x+y+w$. □

eg 5. 证 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R})=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$

证明：设 $f\in Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$，则

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\in\tilde{E},\quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\in\tilde{O}\quad 且 f=g+h.$$

于是 $Map(\mathbb{R},\mathbb{R})=\tilde{E}+\tilde{O}$. 设 f 既是偶函数又是奇函数，则

$f(x)=f(-x)=-f(x)$ 于是 $2f(x)=0$ 即 f 是零函数. $Map(\mathbb{R},\mathbb{R})=\tilde{E}\oplus\tilde{O}$.

(即 $\tilde{E}\cap\tilde{O}=\{0\}\implies Map(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是 $\tilde{E}$ 与 $\tilde{O}$ 的直和). □

1.4 线性相关性

上课提到 $\begin{cases}\text{赋值法}\\ \text{微分法}\end{cases}$

补充：多项式法.

eg6. 设 $S\subset F[x]\setminus\{0\}$. 证明：如果 S 中的元素两两次数不同，则 S 是 F 上的线性无关集。

证：设 $f_1,\cdots,f_k\in S$. 不妨设 $\deg(f_1)<\deg(f_2)<\cdots<\deg(f_k)$. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in F$.

s.t. $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_{k-1}f_{k-1}+\alpha_kf_k=0$.

若 $\alpha_k\neq0$. 则等式左侧是次数为 $\deg(f_k)$ 的多项式. 右侧为零. 矛盾.

同理得 $\alpha_{k-1}=\cdots=\alpha_2=0$. 于是 $\alpha_1f_1=0$. $\because f_1\neq0$ $\therefore\alpha_1=0$.

故 $f_1,f_2\cdots,f_k$ 线性无关。 □

eg7. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. 判断 $e^{\alpha_1x},\cdots,e^{\alpha_nx}$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关。

①. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中有两个数相同，则 $e^{\alpha_1x},\cdots e^{\alpha_nx}$ 中两个函数相同. 于是这组函数线性相关。

② 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 两两不同 以下用两种方法来证：

[赋值法]

设 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

上述式子对 x 取任何实数都成立. 我们取 $x=0, 1, \cdots, n-1$ 得到

$$\beta_1 e^{\alpha_1 k} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n k} = 0 \qquad k=0, 1, \cdots, n-1.$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0 \\ \beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0 \\ \beta_1 e^{2\alpha_1} + \beta_2 e^{2\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{2\alpha_n} = 0 \\ \cdots \\ \beta_1 e^{(n-1)\alpha_1} + \beta_2 e^{(n-1)\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{(n-1)\alpha_n} = 0. \end{cases}$$

于是
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\alpha_1} & e^{\alpha_2} & \cdots & e^{\alpha_n} \\ (e^{\alpha_1})^2 & (e^{\alpha_2})^2 & \cdots & (e^{\alpha_n})^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e^{\alpha_1})^{n-1} & (e^{\alpha_2})^{n-1} & \cdots & (e^{\alpha_n})^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{行列式不为零}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

故只有平凡解 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$.

$e^{\alpha_1 x}, \cdots, e^{\alpha_n x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关. □

[微分法]. 对 $\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0$ 两边求1次, 2次, $\cdots$, $n-1$次导

得 $\beta_1 \alpha_1^k e^{\alpha_1 x} + \cdots + \beta_n \alpha_n^k e^{\alpha_n x} = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$

得到关于 $\beta_i e^{\alpha_i}$ 的齐次线性方程组只有平凡解 即 $\beta_i e^{\alpha_i} = 0$.

于是 $\beta_i = 0$ □

设 $f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(a,b)$，其中 $C^\infty(a,b)$ 是在开区间 (a,b) 上处处可求各阶导数的函数。

定义

$$wr(f_1, \cdots, f_n) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

称之为 $f_1, \cdots f_n$ 的 Wronskian.

eg8. 设 $f_1, \cdots, f_n \in C^\infty(a,b)$. 证明：如果 $f_1, \cdots f_n$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关，则 $wr(f_1, \cdots, f_n) = 0$.

证：设 $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$，其中 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ 不全为零，则

$$a_1 f_1^{(k)} + \cdots + a_n f_n^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

于是

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零，故系数矩阵非满秩，

即 $wr(f_1', \cdots, f_n') = 0$. □

§1.4 线性相关性

$\begin{cases} \text{赋值法} \\ \text{微分法} \end{cases}$ 多项式法.

eg. $f_k = 1/(x+k)$, $k=1,2,\cdots,n$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关。

[微分法]: 设 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ s.t

$$a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n=0.$$

注意到 $f_k^{(m)}=\beta_m f_k^{m+1}$.

其中 $\beta_m\in\mathbb{R}$ 常数，与 k 无关. 于是

$$wr(f_1,\cdots,f_{n-1},f_n)=\beta_0\beta_1\cdots\beta_{n-1}f_1\cdots f_n\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ f_1 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ \vdots & & & \\ f_1^{n-1} & \cdots & f_{n-1}^{n-1} & f_n^{n-1}\end{pmatrix}\neq 0.$$

$\square$.

$f_1,\cdots f_n$ 线性无关.

[多项式法]: $f_1,f_2\cdots f_n$ 线性相关，不妨设

$$f_n=a_1f_1+\cdots+a_nf_{n-1},\ a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$$

则 $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $(x+1)\cdots(x+k+1)=p(x)(x+k)$. 其中 p 是一个关于 x 的多项式函数. 于是，把 x 看成未定元时上述等式仍成立. $\square$.

$\because k\notin\{1,2,\cdots,k-1\}$ $\therefore (x+k)\nmid(k+1)\cdots(x+k-1)$ 矛盾.