第三次作业.

1. $U=\langle \vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle$, $V=\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$. 求 $U+V$, $U\cap V$ 的基.

(1) $U+V=\langle \vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$

法一: $\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_2\\ \vec{u}_3\\ \vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vec{v}_3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2&1&-1\\0&2&0&1&5\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&9&-17\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}_{A} \triangleq \begin{pmatrix}\vec{w}_1\\ \vec{w}_2\\ \vec{w}_3\\ \vec{w}_4\\ \vec{w}_5\\ \vec{w}_6\end{pmatrix}$

初等行变换不改变行空间. 即 $U+V=\langle \vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4,\vec{w}_5,\vec{w}_6\rangle$

$\operatorname{rank}(A)=4$. $\therefore \dim(U+V)=4$. 且 $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3,\vec{w}_4$ 是 $U+V$ 一组基.

法二: $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1&2&3&-1&0&2\\0&2&1&-3&-5&-7\\0&0&3&-1&-1&3\\0&0&0&1&3&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \triangleq (\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5,\vec{a}_6)$

初等行变换会改变列空间

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_1$ 线性无关

$\therefore U+V$ 的一组基为 $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{v}_1$.

(2). $U\cap V=\langle \vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle \cap \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\rangle$.

$\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)=3+3-4=2$.

(可验证 $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ 线性无关, $\therefore \dim U=3$. 同~~理~~样 $\dim V=3$)

法一: 设 $\vec{w}\in U\cap V$, 则 $\vec{w}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3=y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2+y_3\vec{v}_3$ $x_i, y_j\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2+x_3\vec{u}_3-y_1\vec{v}_1-y_2\vec{v}_2-y_3\vec{v}_3=\vec{0}$

$\underbrace{(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,-\vec{v}_1,-\vec{v}_2,-\vec{v}_3)}_{B}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\vec{0}$ $B \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1&2&3&1&0&2\\0&2&1&3&5&7\\0&0&3&1&1&3\\0&0&0&1&3&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore y_1+3y_2+3y_3=0 \Rightarrow y_1=-3y_2-3y_3$

$\vec{w} = (-3y_2-3y_3)\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} + y_3\vec{v_3} = y_2(\vec{v_2}-3\vec{v_1}) + y_3(\vec{v_3}-3\vec{v_1})$

其中，$\vec{v_2}-3\vec{v_1} = -(3,5,6,4,2)^t$，$\vec{v_3}-3\vec{v_1} = -(1,3,4,2,0)^t$

$\therefore U\cap V$ 的一组基为 $(3,5,6,4,2)^t$，$(1,3,4,2,0)^t$。

法二：将 U, V 分别看成齐次方程组的解空间，设对应的齐次方程组分别为

$A\vec{x}=\vec{0}$，$B\vec{x}=\vec{0}$。

则 $U\cap V$ 是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间。

此种解法参考李老师第四周讲义的附录

2. $V=\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$，求 $\mathbb{R}^4/V$ 一组基。

将 $\vec{x},\vec{y}$ 扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基：$\vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v}$，则 $\vec{u}+V, \vec{v}+V$ 是商空间的一组基。

例：取 $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$。验证 $\vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v}$ 线性无关 又 $\dim\mathbb{R}^4=4$

则 $\vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基。

3. 证 $\dim(V\times W)=\dim(V)+\dim(W)$。

法一：设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$ 是 V 一组基，$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_m}$ 是 W 一组基

验证 $(\vec{v_1},\vec{0_w}),\cdots,(\vec{v_n},\vec{0_w}),(\vec{0_v},\vec{w_1}),\cdots,(\vec{0_v},\vec{w_m})$ 是 $V\times W$ 的一组基

证明：① 上述向量线性无关（在 F 上）② $V\times W$ 中任意元素都可以由写成上述向量的线性组合。

法二：考虑自然投射：$\varphi_V: V\times W \longrightarrow V$

$(\vec{v},\vec{w}) \longmapsto \vec{v}$。

$\ker(\varphi_V)=\{\vec{0}\}\times W$ 且 $\operatorname{im}(\varphi_V)=V$，由线性映射基本定理 I 可知

$\dim(V\times W)=\dim(\ker(\varphi_V))+\dim(\operatorname{im}(\varphi_V))=\dim(W)+\dim(V)$

4. U是$Ax=0$的解空间，V是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$的解空间，其中 $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{k\times n}$.

证 $\dim(V)\geq \dim(U)-k$.

法一：由对偶定理，$\operatorname{rank}(A)+\dim(U)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\dim(V)=n$.

$$\Rightarrow \dim(U)-\dim(V)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-\operatorname{rank}(A)\underset{\text{注}}{\leq} k \Rightarrow \dim(V)\geq \dim(U)-k$$

注：矩阵增加一行或一列，秩最多加1

法二：先证如下不等式：设 W_1, W_2 是n维线性空间W的子空间且 $\dim(W_2)\geq n-1$，
则 $\dim(W_1\cap W_2)\geq \dim(W_1)-1$.

Pf: $\because$ $\dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1+W_2)$
$\geq \dim(W_1)+n-1-n=\dim(W_1)-1$

设U_i是以B中第i行为系数矩阵的齐次方程组的解空间，则
$\dim(U_i)\geq n-1$, $i=1,2,\cdots,k$. 而 $V=U\cap U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_k$.
由上述不等式得. $\dim(U\cap U_1)\geq \dim(U)-1$

$$\Rightarrow \dim((U\cap U_1)\cap U_2)\geq \dim(U\cap U_1)-1\geq \dim(U)-2$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow \dim(\underbrace{U\cap U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_k}_{V})\geq \dim(U)-k.$$

5. $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times m}$. 证明：

$$m-\operatorname{rank}(E_m-AB)=n-\operatorname{rank}(E_n-BA)$$

Pf：法一：分块矩阵.

考虑矩阵 $\cancel{\begin{pmatrix}E_m & A\\ B & E_n\end{pmatrix}}$ $M=\begin{pmatrix}E_m-AB & 0\\ 0 & E_n\end{pmatrix}\in M_{m+n}(F)$.

$$\begin{pmatrix} E_m-AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左乘}\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m-AB & A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{左乘}\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & E_n-BA \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix} E_m & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n-BA \end{pmatrix}$$

由于每步乘的矩阵都是满秩的，故

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} E_m-AB & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n-BA \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow n+\operatorname{rank}(E_m-AB) = m+\operatorname{rank}(E_n-BA)$$

$$\Rightarrow m-\operatorname{rank}(E_m-AB) = n-\operatorname{rank}(E_n-BA)$$

法二：核方法

设 $\phi_{E_m-AB}: F^m \longrightarrow F^m$, $\vec{x} \longmapsto (E_m-AB)\vec{x}$， $\phi_{E_n-BA}: F^n \longrightarrow F^n$, $\vec{x} \longmapsto (E_n-BA)\vec{x}$

由对偶定理，$\dim(\ker(\phi_{E_m-AB})) + \operatorname{rank}(E_m-AB) = m$.

$\dim(\ker(\phi_{E_n-BA})) + \operatorname{rank}(E_n-BA) = n$.

要证 $m-\operatorname{rank}(E_m-AB) = n-\operatorname{rank}(E_n-BA)$

等价证明：$\dim(\ker(\phi_{E_m-AB})) = \dim(\ker(\phi_{E_n-BA}))$.

记，$K_{E_m-AB} = \ker(\phi_{E_m-AB})$，$K_{E_n-BA} = \ker(\phi_{E_n-BA})$

设 定义 $\rho: K_{E_m-AB} \longrightarrow K_{E_n-BA}$

$$\vec{x} \longmapsto B\vec{x}.$$

注意到. $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}-AB\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow B\vec{x}-BA(B\vec{x})=\vec{0}$

$\Rightarrow (E_n-BA)(B\vec{x})=\vec{0}. \Rightarrow B\vec{x} \in \cancel{\ker} K_{E_n-BA}.$

$\therefore$ 上述线性映射是良定义的.

$\ker(\rho)=\{\vec{x}\in K_{E_m-AB} \mid B\vec{x}=\vec{0}\}.$

取 $\vec{x}\in\ker(\rho)$. $B\vec{x}=\vec{0}$ 且 $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{x}-A(B\vec{x})=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}.$

$\therefore \ker(\rho)=\{\vec{0}\}$. $\therefore$ ρ 是单射. 下证 ρ 是满射.

$\forall \vec{y}\in K_{E_n-BA}$. i.e. $(E_n-BA)\vec{y}=\vec{y}-BA\vec{y}=\vec{0}$ $(*)$

$\Rightarrow A\vec{y}-AB(A\vec{y})=\vec{0} \Rightarrow (E_m-AB)(A\vec{y})=\vec{0} \Rightarrow A\vec{y}\in K_{E_m-AB}.$

且 $\rho(A\vec{y})=BA\vec{y}\underset{\text{由}(*)}{=}\vec{y}$ $\therefore$ ρ 是满射. 从而 ρ 是同构.

$\Rightarrow \dim(K_{E_m-AB})=\dim(K_{E_n-BA}).$

6. $AB=BA$. 证 $\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(AB)\leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$, $A,B\in M_n(F)$.

Pf: $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix}E_n&E_n\\0&E_n\end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix}A&B\\0&B\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右乘}\begin{pmatrix}E_n&0\\E_n&E_n\end{pmatrix}]{} \begin{pmatrix}A+B&B\\B&B\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}E_n&0\\B&-(A+B)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A+B&B\\B&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&B\\0&-AB\end{pmatrix}$ 注意 $AB=BA$.

$\therefore \underbrace{\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}}_{=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+B&B\\B&B\end{pmatrix}\geq \operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+B&B\\0&-AB\end{pmatrix}\geq \operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(AB)$

复习：① 设 M 是具有以下四种分块形式之一的矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

则 $\mathrm{rank}(M) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$，且当 $C = O$ 时等号成立。

② $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 如果 A, B 都满秩，则 M 满秩。

补：

4. 法三： $\varphi: U \longrightarrow F^k$ 线性映射。

$$\vec{x} \longmapsto B\vec{x}.$$

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= U \cap \mathrm{sol}(B\vec{x} = \vec{0}_k) \\ &= \mathrm{sol}(A\vec{x} = \vec{0}_m) \cap \mathrm{sol}(B\vec{x} = \vec{0}_k) \\ &= V. \end{aligned}$$

$\because$ $U/\ker(\varphi) \cong \mathrm{im}(\varphi)$

$\therefore$ $\dim\left(U/\ker(\varphi)\right) = \dim(U) - \dim(V) = \dim(\mathrm{im}(\varphi)) \leq k.$

$\Rightarrow \dim(V) \geq \dim(U) - k.$

1、基变换与坐标变换．

Th: $\dim(V)<\infty$．基域 F．

$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 一组基，$\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'}\in V$．则

$\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'}$ 是 V 一组基 $\Leftrightarrow \exists!\, P\in GL_n(F)$ s.t. $(\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$．

分析：① V 中的基相差一个可逆 n 阶矩阵．

② 给定一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，任给可逆矩阵 $P\in GL_n(F)$，$(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$ 都是 V 的一组基

③ 给定一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，任给 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_n}\in V$．判断 $\vec{u_1},\cdots,\vec{u_n}$ 是否是 V 的一组基，看转换矩阵 P $\left((\vec{u_1},\cdots,\vec{u_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P\right)$ 是否可逆．

Th: $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 和 $\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'}$ 是 V 的两组基 且 $(\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$．

$\vec{x}\in V$．在以上两组基下坐标分别为 $(x_1,\cdots,x_n)^t$，$(x_1',\cdots,x_n')^t$，则

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

2、对偶空间．

$V^*=Hom(V,F)$

Th: $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是 V 一组基，则 V^* 中 $\exists!$ 一组基 $\vec{e_1^*},\cdots,\vec{e_n^*}$ s.t.

$$\vec{e_i^*}(\vec{e_j})=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad, i,j\in\{1,2,\cdots,n\}.$$

特别地，$\dim(V^*)=n$．（$\vec{e_1^*},\cdots,\vec{e_n^*}$ 称为 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 的对偶基）

prop: (1). $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，则 $\vec{e_i^*}(\vec{x})=x_i$．（方便取坐标）

(2). $f_1,\cdots,f_n$ 是 V^* 一组基．$\vec{x},\vec{y}\in V$．则

$$\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow f_i(\vec{x})=f_i(\vec{y}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$