第三次习题课

一、作业二中的问题及答案

1. (1) $M_n(F)$ 中行列式为0的矩阵全体不是原空间的线性子空间.

① 当 $n=1$ 时. det 是恒同映射.

② 当 $n>1$ 时.

$$\mathrm{diag}_n(1,0,\cdots,0)+\mathrm{diag}_n(0,1,\cdots,1)=E_n$$

加法不封闭, 故不是子空间.

(2) $M_n(F)$ 中迹为0的矩阵全体是原空间的线性子空间.

证: 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是迹为零的矩阵, $\alpha,\beta\in F$.

①: $tr(\alpha A+\beta B)=\alpha tr(A)+\beta tr(B)=0 \Longrightarrow \alpha A+\beta B$ 迹为0.

②(解空间法) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $tr(A)=0$.

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0.$$

迹为0的矩阵全体是关于未知数 a_{ij} 的方程组在 $F^{n\times n}$ 中的解空间.

于是是子空间.

2. 证明: Step 1: 先证 $\forall A\in M_n(F)$. $S\in SM_n(F)$, $U\in UM_n(F)$.

$A=S+U$ $(M_n(F)=SM_n(F)+UM_n(F))$.

Step 2: $SM_n(F)\cap UM_n(F)=\{0\}$.

证明过程: $\forall A\in M_n(F)$. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 令 $S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

$$U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{n1} \\ & 0 & & a_{2n}-a_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

显然 $A=S+U$.

$\therefore$ $M_n(F)=SM_n(F)+UM_n(F)$.

对 $\forall B \in SM_n(F) \cap UM_n(F)$.

$\because B=(b_{ij})_{n\times n}$ $\quad B\in UM_n(F)$. $\quad \therefore b_{ij}=0 \quad \forall i\geq j$.

又 $\because B\in SM_n(F)$. $\quad b_{ij}=b_{ji}=0 \quad \forall i,j$ 成立.

$\therefore B=0$.

即 $SM_n(F)\cap UM_n(F)=\{0\}$.

$\therefore M_n(F)=SM_n(F)\oplus UM_n(F)$

3. (1) $U\cap(V+W)=(U\cap V)+(U\cap W)$ 不成立.

理由: 要证相等 只证 $\begin{cases} U\cap(V+W)\subseteq(U\cap V)+(U\cap W) \\ U\cap(V+W)\supseteq(U\cap V)+(U\cap W)\end{cases}$

显然 $U\cap V\subseteq U\cap(V+W) \quad U\cap W\subseteq U\cap(V+W)$.

$\therefore (U\cap V)+(U\cap W)\subseteq U\cap(V+W)$.

反之不成立:

例如:

$U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$, $V=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$, $W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

任意的 $\vec{v}\in U\cap V$ 即 $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\therefore U\cap V=\{\vec{0}\}$.

同理 $U\cap W=\{\vec{0}\}$ 但 $V+W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ 且 $U\subseteq V+W$.

$U\cap(V+W)=U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. 此时 $U\cap(V+W)\neq(U\cap V)+(U\cap W)$ $\square$.

或者取 $U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$. $V=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$. $W=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 子空间

也可说明.

(2) 直和不满足消去律

① 考虑线性空间 $\mathbb{R}^2$，其中 $U=\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$ $V=\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$ $W=\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$

均为 $\mathbb{R}^2$ 子空间. 易证 $U+V=U+W=\mathbb{R}^2$

且对任意的 $\vec{\alpha}\in U\cap V$ 即 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow U\cap V=\{\vec{0}\}$

同理可证 $U\cap W=\{\vec{0}\}$ $\therefore U\oplus V=U\oplus W=\mathbb{R}^2$ 但 $V\neq W$. □

② $M_n(F)=SM_n(F)\oplus SSM_n(F)=SM_n(F)\oplus UM_n(F)$.

$SSM_n(F)\neq UM_n(F)$. $\mathrm{char}(F)\neq 2$.

4. (1). $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx$ 线性无关.

理由如下:

① 归纳假设

$n=1$ 时，显然.

$n>1$ 时，设 $n-1$ 结论成立.

设 $\beta_1\sin x+\beta_2\sin 2x+\cdots+\beta_{n-1}\sin(n-1)x+\beta_n\sin nx=0$.

$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n\in\mathbb{R}$ 且不全为零.

由此我们可设 $\beta_n\neq 0$ 令 $\beta_n=1$.

即 $\sin nx=-\beta_1\sin x-\beta_2\sin 2x-\cdots-\beta_{n-1}\sin(n-1)x$.

求两次导可得:

$-n^2\sin nx=\beta_1\sin x+\cdots+(n-1)^2\beta_{n-1}\sin(n-1)x$

$\sin nx=-\frac{\beta_1}{n^2}\sin x\mp\cdots\mp\frac{(n-1)^2\beta_{n-1}}{n^2}\sin(n-1)x$.

故得 $\beta_1=\frac{\beta_1}{n^2}, \cdots \beta_{n-1}=\frac{(n-1)^2}{n^2}\beta_{n-1}$

不妨设 $\beta_i\neq 0$ $(1\leq i\leq n-1)$ $\frac{i^2}{n^2}\beta_i=\beta_i \Longrightarrow \frac{i^2}{n^2}=1$ 矛盾.

②

sinnx可以展成关于sinx, cosx的n次多项式.

再利用归纳假设.

$n=1$ 显然

$n=k-1$ 成立. 那么当$n=k$时, 假设不成立.

则 $\sin kx$ 可以写成 $\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin(k-1)x$ 之线性组合.

即 $\sin kx = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_{n-1}\sin(k-1)x$.

等式左侧次数大于右侧次数. 矛盾.

③ 求 $(2n-2)$次导. 得

$$\begin{cases} a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx = 0. \\ a_1\sin x + 2^2 a_2\sin 2x + \cdots + n^2 a_n\sin nx = 0. \\ \cdots \\ a_1\sin x + 2^{2n-2}a_2\sin 2x + \cdots + n^{2n-2}a_n\sin nx = 0. \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-2} & \cdots & n^{2n-1} \end{pmatrix}}_{\text{矩阵}A.}\begin{pmatrix} a_1\sin x \\ a_2\sin 2x \\ \vdots \\ a_n\sin nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

变形为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 4^{n-1} & \cdots & (n^2)^{n-1} \end{pmatrix}$ $\det(A)\neq 0$.

故 $a_1\sin x = a_2\sin 2x = \cdots = a_n\sin nx = 0$ $\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

(以上两种方法为同学们解法).

④

$$\int_0^{2\pi} \sin jt \sin kt\, dt = \begin{cases} \pi & 若j=k \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

要证线性关系，可设

$$\beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \cdots + \beta_n \sin nx = 0$$

左右两边同乘 $\sin jx$

$$\beta_1 \sin x \sin jx + \beta_2 \sin 2x \sin jx + \cdots + \beta_n \sin nx \sin jx = 0.$$

取 $j=1,2,3,\cdots,n$ 然后对等式在区间 $[0,2\pi]$ 做定积分，则

$$\beta_1\pi = \beta_2\pi = \cdots = \beta_n\pi = 0.$$

(2). $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有相同的实数，则线性相关.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中所有实数两两互不相同，线性无关.

① 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\alpha_1 x^{a_1} + \alpha_2 x^{a_2} + \cdots + \alpha_n x^{a_n} = 0.$$

则 $\alpha_1 + \alpha_2 x^{a_2-a_1} + \cdots + \alpha_n x^{a_n-a_1} = 0.$

当 $x \to \infty$ 时 $\alpha_1 = 0$.

依次类推 $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0.$

最终 $\alpha_n x^{a_n-a_1} = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0.$

② 赋值法：取 $x = 2^i$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

5. ① 线性性证明:

$\forall\, \alpha, \beta \in K.\quad g(t), f(t) \in P_n.$

$$\varphi(\alpha f(t)+\beta g(t)) = t(\alpha f(t)+\beta g(t))' - (\alpha f(t)+\beta g(t))$$
$$= t(\alpha f'(t)+\beta g'(t)) - (\alpha f(t)+\beta g(t))$$
$$= \alpha(tf'(\alpha) - f(t)) + \beta(tg'(t) - g(t))$$
$$= \alpha\varphi(f(t)) + \beta\varphi(g(t)).$$

② 求 $\ker\varphi$:

设 $f(t) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_{n-1}t^{n-1}$ $\quad u_i \in K.$

则 $f(t) = tf'(t)$

即 $u_0 + u_1 t + \cdots + u_{n-1}t^{n-1} = t[u_1 + 2u_2 t + \cdots + (n-1)u_{n-1}t^{n-2}]$

$$= u_1 t + 2u_2 t + \cdots + (n-1)u_{n-1}t^{n-1} \qquad (*)$$

① 当 $char(K)=0.$

$u_0 = 0 \quad u_1 = u_1 \quad u_i = iu_i \quad i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$

$$\Rightarrow u_2 = u_3 = \cdots = u_{n-1} = 0.$$

$\ker\varphi = \{f(t) = u_1 t \mid u_1 \in K\} = \langle t \rangle_R$

② $char(K) = p.$

再整理 $(*)$ 式.

$$-u_0 + (u_1 - u_1)t + (2u_2 - u_2)t + \cdots + [(n-1)u_{n-1} - u_{n-1}]t^{n-1} = 0.$$

若要得 $\quad (i-1)u_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$

$\qquad\qquad u_0 = 0 \quad i = 0.$

即 当 $p \nmid (i-1) \Rightarrow u_i = 0.$

$\ker\varphi = \{f(t) = u_0 + u_1 t + \cdots + u_{n-1}t^{n-1} \mid u_i = 0$ 当 $0 \le i \le n-1,\ p \nmid (i-1)\}.$

二. 补充上次习题课提到的多项式法证线性无关性.

eg. $x^2+k \in Map(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $k=1,2,\cdots,n$ 是否在 $\mathbb{R}$ 上线性相关.

多项式法. $n=1$, $x^2+1 \neq 0$, 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

$n=2$. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x^2+2)=0$.

则 $p(x)=(\alpha_1+\alpha_2)x^2+\alpha_1+2\alpha_2=0$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 都成立.

于是 $\alpha_1+2\alpha_2=0$ 且 $\alpha_1+\alpha_2=0$. 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A)\neq 0$ $\therefore \alpha_1=\alpha_2=0$.

$n=3$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ s.t $\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x^2+2)+\alpha_3(x^2+3)=0$.

则对任意的 $x\in\mathbb{R}$,

$$p(x)=\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}_{=0}x^2+\underbrace{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}_{=0}=0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

不是列满秩. 有非平凡解. 线性相关.

$n>3$ 时, 这 n 个函数在 $\mathbb{R}$ 上线性相关.

三、课程内容回顾与补充

3.1 商空间

掌握基本定义

3.2 自然的线性映射

①任意的映射可分解为单+满

②抽象的维数公式：

V_1, V_2 是 V 的子空间，则 $V_2/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1+V_2)/V_1$.

特别地：V_1+V_2 是直和 则 $(V_1+V_2)/V_1 \cong V_2$

4.1 极大线性无关组

可扩充
等势
表示唯一.

4.2 基底和维数.

主要研究的空间为：向量、矩阵、函数(多项式).

4.3 若干维数公式

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

$$\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \le \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k)$$

4.4 矩阵不等式

核方法的基本步骤要掌握.