第四次习题课

一、作业题中的问题与解析

1. ① $U+V=\langle \vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$

$(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ 计算此矩阵的秩即可得 $\dim(U+V)=4$

又由于 $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\vec{v_1}$ 线性无关，故为一组基.

② 回顾公式 $\dim U+\dim V=\dim(U+V)+\dim(U\cap V)$.

验证 $\dim U=\dim V=3$ 故 $\dim(U\cap V)=2$.

可设 $\vec{w}=x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3}=y_1\vec{v_1}+y_2\vec{v_2}+y_3\vec{v_3}$

$(\forall\ \vec{w}\in U\cap V,\ \exists x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R},\ y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R})$.

即 $x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3}-y_1\vec{v_1}-y_2\vec{v_2}-y_3\vec{v_3}=0$.

解关于未知量 $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)$ 的齐次线性方程组.

计算系数矩阵的秩为4. 故有两个自由變量.

假定为 x_2,x_3. 即 $x_1=\alpha x_2+\beta x_3$

$\vec{w}=\alpha x_2\vec{u_1}+\beta x_3\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3}=(\alpha x_2+x_2)v$

$=(\alpha\vec{u_1}+\vec{u_2})x_2+(\beta\vec{u_1}+\vec{u_3})x_3$

取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 即可.

或：$A=(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})\in\mathbb{R}^{5\times3}$ $A^t\vec{x}=\vec{0}$ 解空间 $\vec{w_1}\ \vec{w_2}$

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^t$

$B=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})\in\mathbb{R}^{5\times3}$ $B^t\vec{x}=\vec{0}$ 解空间 $\vec{w_3},\vec{w_4}$

$C=(\vec{w_1},\vec{w_2},\vec{w_3},\vec{w_4})\in\mathbb{R}^{5\times4}$ $C^t\vec{x}=\vec{0}$

求得此方程组的组基即为

$\langle\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}\rangle\cap\langle\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$ 的一组基。

2. $\dim V=2$ $\quad(\because\ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=0 \quad \alpha=\beta=0)$.

$\dim(\mathbb{R}^4/V)=\dim\mathbb{R}^4-\dim V=2$.

将 $\vec{x},\vec{y}$ 扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基：$\vec{x},\ y,\ \vec{e_3},\ \vec{e_4}$ $\quad \vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \ \vec{e_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

则 $\vec{e_3}+V,\ \vec{e_4}+V$ 是商空间的一组基.

3. $\dim(V\times W)=\dim(V)+\dim(W)$.

①. 直接验证：

设 $\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots,\vec{v_n}$ 是 V 的基，$\vec{w_1},\vec{w_2},\cdots,\vec{w_n}$ 是 W 的基.

可直接证明 $(\vec{v_1},\vec{0_W}),\cdots,(\vec{v_m},\vec{0_W}),(\vec{0_V},\vec{w_1}),\cdots,(\vec{0_V},\vec{w_n})$

是 $V\times W$ 的基. 极大线性无关组即可 $\begin{cases}\cdots\text{线性无关}\\ \text{再增一元素线性相关}.\end{cases}$

② $\psi_V: V\times W\to V$

$(\vec{v},\vec{w})\mapsto\vec{v}$

$\ker(\psi_V)=\{\vec{0_V}\}\times W$ 且 $\mathrm{im}(\psi_V)=V$.

由线性映射基本定理 I. 可知

$\dim(V\times W)=\dim(\ker(\psi_V))+\dim(\mathrm{im}(\psi_V))$

$=\dim W+\dim V$

讲第3题前先补充：

设 V 和 W 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 在 $V\times W$ 上定义

$\forall\ \vec{v_1},\vec{v_2}\in V,\ \vec{w_1},\vec{w_2}\in W,\quad (\vec{v_1},\vec{w_1})+(\vec{v_2},\vec{w_2})=(\vec{v_1}+\vec{v_2},\vec{w_1}+\vec{w_2})$

和 $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha(\vec{v_1},\vec{w_1})=(\alpha\vec{v_1},\alpha\vec{w_1})$. $V\times W$ 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 零向量 $(\vec{0_V},\vec{0_W})$.

自然嵌入：$\phi_V: V\longrightarrow V\times W$ 和 $\phi_W: W\longrightarrow V\times W$

$\vec{v}\longmapsto(\vec{v},\vec{0_W})$ $\qquad \vec{w}\longmapsto(\vec{0_V},\vec{w})$

自然投射：$\psi_V: V\times W\longrightarrow V$ $\qquad \psi_W: V\times W\longrightarrow W$

$(\vec{v},\vec{w})\longmapsto\vec{v}$ $\qquad (\vec{v},\vec{w})\longmapsto\vec{w}$.

4. 由：系数矩阵的秩＋解空间的维数＝未知数的个数.

$$\operatorname{rank}(A)+\dim(U)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\dim(V)$$

$$\Rightarrow \dim(U)-\dim(V)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-\operatorname{rank}(A)\le k. \qquad \square$$

方法二：
$$\begin{aligned}\varphi: U &\longrightarrow F^k\\ \vec{x} &\longmapsto B\vec{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker(\varphi)&=U\cap sol(B\vec{x}=\vec{0}_k)\\&=sol(A\vec{x}=\vec{0}_m)\cap sol(B\vec{x}=\vec{0}_k)\\&=V\end{aligned}$$

$\because$ $U/\ker\varphi\cong \operatorname{im}\varphi$

$\therefore$ $\dim(U/\ker\varphi)=\dim U-\dim V=\dim(\operatorname{im}(\varphi))\le k.$ $\square$.

5. 设 $\phi_{E_m-AB}: F^m\longrightarrow F^m$, $\vec{x}\longmapsto (E_m-AB)\vec{x}$

$\phi_{E_n-BA}: F^n\longrightarrow F^n$, $\vec{x}\longmapsto (E_n-BA)\vec{x}$

（部分同学设：$\phi_A: F^n\to F^m$, $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$. $\phi_B: F^m\to F^n$, $\vec{x}\mapsto B\vec{x}$ ）

归根结底都要转化为：

$$\dim(\ker(\phi_{E_m-AB}))+\operatorname{rank}(E_m-AB)=m$$

$$\dim(\ker(\phi_{E_n-BA}))+\operatorname{rank}(E_n-BA)=n.$$

要证 $m-\operatorname{rank}(E_m-AB)=n-\operatorname{rank}(E_n-BA).$

等价证明 $\dim(\ker(\phi_{E_m-AB}))=\dim(\ker(\phi_{E_n-BA}))$

定义 $\rho: K_{E_m-AB} \to K_{E_n-BA}$

$$\vec{x} \longmapsto B\vec{x}$$

注意到 $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}-AB\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow B\vec{x}-BA(B\vec{x})=\vec{0} \Rightarrow (E_n-BA)(B\vec{x})=\vec{0}$ $\quad B\vec{x}\in K_{E_n-BA}$.

well define.

$\ker(\rho)=\{\vec{x}\in K_{E_m-AB} \mid B\vec{x}=\vec{0}\}$

取 $x\in\ker(\rho)$ $\quad B\vec{x}=\vec{0}$ 且 $(E_m-AB)\vec{x}=\vec{x}-A(B\vec{x})=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

ρ单

$\forall y\in K_{\cancel{E_m-AB}\,E_n-BA}$ i.e $(E_n-BA)\vec{y}=\vec{0}$ $(*)$. $\qquad \rho(A\vec{y})=BA\vec{y}\underset{(*)}{=}\vec{y}$

$\Rightarrow A\vec{y}-AB(A\vec{y})=\vec{0} \Rightarrow (E_m-AB)(A\vec{y})=\vec{0} \Rightarrow A\vec{y}\in K_{E_m-AB}$

$\therefore \rho$满

单+满+保持线性 $\Rightarrow$ 同构

矩阵分块: M具有以下四种分块形式之一.

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(M)\geq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ 且当$C=0$成立.

5. 设 $M=\begin{pmatrix} E_m-AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E_m-AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\times A+r_1} \begin{pmatrix} E_m-AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix} \xrightarrow{j_2\times B+j_1} \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-B\times r_1+r_2} \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n-BA \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1\times(-A)+j_2} \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n-BA \end{pmatrix}.$$

一系列初等变换不改变矩阵的秩.

6. 设 $M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 则

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{j_1+j_2} \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(A+B) & A \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -AB & 0 \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

由结论 $\operatorname{rank}(AB) \le \min[\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)]$.

故 $\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

二、课程内容回顾与补充.

5.1 坐标变换

($\mathbb{R}^2$ 中的坐标旋转) 设 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 标准基. 把该基底逆时针旋转 θ 得到另一组基 $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}$ 则

$$(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{A}.$$

计算得 $A^{-1} = A^t$ 设 $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} = y_1\vec{\varepsilon_1} + y_2\vec{\varepsilon_2}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

5.2 线性映射的矩阵表示

注意 $\phi: V \longrightarrow W$

$(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}) \longmapsto (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \cdots, \vec{\varepsilon_m})$.

矩阵受线性映射控制

行列式不受线性映射控制

6.1 对偶基

设 $V=\mathbb{R}[x]^{(n)}$，对 $i=0,1,\cdots,n$ 定义：

$$\psi_i: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \frac{1}{i!}\frac{d^i f}{dx^i}(0)$$

证明 $\psi_0,\cdots,\psi_{n-1}$ 是 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 的一组对偶基.

先验证 $\psi_i \in V^*$ $\quad \frac{d}{dx} \in Hom(V,V)$ 赋值同态 $\phi_0 \in Hom(\mathbb{R}[x],\mathbb{R})$，

其中 $\phi_0(f)=f(0)$ 而

$$\psi_i = \frac{1}{i!}\phi_0 \circ \underbrace{\frac{d}{dx}\circ \cdots \circ \frac{d}{dx}}_{i}$$

于是 $\psi_i \in V^*$

只需验证 $\psi_i(x^j)=\delta_{ij}$ $\quad i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 即可.

$j<i$ 时 $\psi_i(x^j)=0$. x^j 的 i 阶导恒为 0.

$j>i$ 时 $\psi_i(x_j)=\phi_0(\alpha_{ij}x^{j-i})=0$. $\quad \alpha_{ij}$ 为某个有理数.

$j=i$ 时 $\psi_i(x^i)=\phi_0(1)=1$. $\quad \square$.

7.1 双线性型的定义和矩阵表示.

① 验证是否为双线性型.

② 会求在基(标准基)下的矩阵.