# 第五次习题课

## 一、作业中的问题

2. 设 $\mathbb{R}[x]^n=\{f\in\mathbb{R}[x] \mid \deg(f)<n\}$. 其中 $n>1$. 设 $\varphi:\mathbb{R}[x]^n \longrightarrow \mathbb{R}[x]^n$

$$f \longmapsto f''$$

(ii) 试问: $\ker(\varphi)+\operatorname{im}(\varphi)$ 是不是直和? 并说明理由.

$n=2$ 时: $\operatorname{im}(\varphi)=0$ 是直和.

$n\geq 3$ 时. $\ker(\varphi)\cap \operatorname{im}\varphi \neq \{0\}$ 不是直和.

设 $y\in \operatorname{im}(\varphi)$ 则 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-3}x^{n-3}$

其中 $a_i$ 不全为零 $i=0,1,2,\cdots,n-3\in\mathbb{R}$.

若 $y\in\ker(\varphi)$ 则 $y''=2a_2+\cdots+(n-3)(n-4)a_{n-3}x^{n-5}=0$.

$\Longrightarrow y=a_0+a_1x$ $\qquad$ $\operatorname{im}\varphi\cap\ker\varphi\neq\{0\}$.

理由合理即可。

3. 设 $V$ 是 $F$ 上的有限维线性空间. $f,g\in V^*\setminus\{0^*\}$. 证明: $\ker(f)=\ker(g)$ 当且仅当 $\exists\lambda\in F$ s.t $f=\lambda g$.

证: "$\Leftarrow$" $\forall \vec{y}\in\ker f$. $f(\vec{y})=\vec{0}=(\lambda g)(\vec{y})=\lambda g(\vec{y})$ $\Rightarrow g(\vec{y})=\vec{0}$

$\therefore \vec{y}\in\ker g$ $\Longrightarrow \ker f\subset\ker g$ $\qquad$ 同理可得 $\ker g\subset\ker f$.

故 $\ker g=\ker f$.

"$\Longrightarrow$" 任取 $\vec{v}\in V$.

若 $\vec{v}\in\ker f$ 则 $f(\vec{v})=\lambda g(\vec{v})=\vec{0}$ 成立.

若 $\vec{v}\notin\ker f$ $\because f(\vec{v})\in F$. 则 $\vec{v}=f(\vec{v})\vec{v_0}$

故 $f(\vec{v}-f(\vec{v})\vec{v_0})=0$

又 $\because \ker f=\ker g$

$\therefore g(\vec{v}-f(\vec{v})\vec{v_0})=0 \Rightarrow g(\vec{v})=f(\vec{v})g(\vec{v_0})$ $(\because g(\vec{v_0})\in F)$

$\Rightarrow \exists\lambda$ s.t $\lambda g=f$.

$\square$

5. (ii)

解: 由 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_2\cap V_3)=\dim(V_1\cap V_3)=k-1$.

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3)&=\dim(V_1+(V_2+V_3))\\&=\dim V_1+\dim(V_2+V_3)-\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\\&=k+k+1-\dim(V_1\cap(V_2+V_3))\\&=2k+1-\dim(V_1\cap(V_2+V_3)).\end{aligned}$$

由作业二习题3知

$$V_1\cap V_2+V_1\cap V_3\subseteq V_1\cap(V_2+V_3)$$

故 $\dim((V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3))\le\dim(V_1\cap(V_2+V_3))$.

$$\begin{aligned}&\le 2k+1-\dim((V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3))\\&=2k+1-[\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1\cap V_3)\\&\qquad-\dim((V_1\cap V_2)\cap(V_1\cap V_3))\\&=2k+1-[(k-1)+(k-1)-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)]\\&=3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3).\end{aligned}$$

故 $\dim(V_1+V_2+V_3)\le 3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$.

又 $\dim(V_1+V_2+V_3)\ge\dim(V_1+V_2)=k+1$

$\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\le\dim(V_1\cap V_2)=k-1$.

故

$$k+1\le\dim(V_1+V_2+V_3)\le 3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)\le k+2$$

① $3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=k+2$ 即 $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=k-1$. 成立.

此时 $\dim(V_1+V_2+V_3)=k+2$ or $\underline{k+1}$ 不成立.

② $3+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=k+1$ 即 $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=k-2$

此时 $\dim(V_1+V_2+V_3)=k+1$ 成立

故两者不能同时取得. □

eg1. 设$\mathbb{R}^4$中的标准基是$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}$

情形1. $V_1=\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle$ $V_2=\langle\vec{e_2},\vec{e_3}\rangle$ $V_3=\langle\vec{e_1},\vec{e_3}\rangle$

此时 $k=2$

$\dim(V_1+V_2+V_3)=3$. $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=0\neq 2-1$.

情形2. $V_1=\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle$ $V_2=\langle\vec{e_1},\vec{e_3}\rangle$ $V_3=\langle\vec{e_1},\vec{e_4}\rangle$

此时 $k=2$

$\dim(V_1+V_2+V_3)=4\neq k+1$ $\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=1$.

二. 课程内容回顾

7.1. 双线性型积的定义

双线性型对称与反对称的定义 $\begin{cases}\text{与矩阵的联系}\\\text{合同关系保持(斜)对称}\end{cases}$

7.2 对称双线性型

极化公式：处理二元的从形式上到一元的转化.

降维法：证明主要定理（$char(F)\neq 2$. $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$, V中有一组基使得f在该基下的矩阵是对角阵).

计算方法 $\begin{cases}\text{上述提到的降维}\\\text{行列相伴 (*)}\\\text{配方法}\end{cases}$

三. 拓展与补充（行列相伴变换).

设$F_{ij}$是n阶第一类初等矩阵, ($i,j\in 1,2,\cdots,n$), $F_{ij}(\lambda)$是第二类初等矩阵 ($i,j\in 1,\cdots,n$) $i\neq j$, $\lambda\in F$.

引理1：设 $A\in SM_n(F)$，$B=F_{ij}^tAF_{ij}$ 是对称矩阵且

$$B=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccc}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&&&\vdots&&\\ a_{j1}&\cdots&\boxed{a_{jj}}&\cdots&a_{ji}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&&&&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&\boxed{a_{ii}}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&&&\vdots&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{array}\right]&\\ &\begin{array}{l}\to i\\ \\ \to j\end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}&&\uparrow&&\uparrow&&\\&&i&&j&&\end{array}&\end{array}$$

证：由

$$F_{ij}^tAF_{ij}=\left[\begin{array}{ccccccc}a_{11}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&\boxed{a_{ii}}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{j1}&\cdots&a_{ji}&\cdots&\boxed{a_{jj}}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{array}\right]$$

左乘初等矩阵 $F_{ij}^t$ 对 $A$ 的行作变换。

再右乘初等矩阵 $F_{ij}$ 作列变换。 又由 $A$ 对称 $F_{ij}$ 对称 $A\simeq_c B\Rightarrow B$ 对称。

引理2：设 $A\in SM_n(F)$，$B=F_{ij}(\lambda)^tAF_{ij}(\lambda)$ 是对称矩阵且

$$B=\begin{array}{cl}\left[\begin{array}{ccccccccc}a_{11}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1j}+\lambda a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\\ a_{i1}&\cdots&a_{ii}&\cdots&a_{ij}+\lambda a_{ii}&\cdots&a_{jn}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{j1}+\lambda a_{i1}&\cdots&a_{ji}+\lambda a_{ii}&\cdots&a_{jj}+2\lambda a_{ij}+\lambda^2a_{ii}&\cdots&a_{jn}+\lambda a_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{ni}&\cdots&a_{nj}+\lambda a_{ni}&\cdots&a_{nn}\end{array}\right]&\begin{array}{l}\leftarrow i\\ \\ \leftarrow j\end{array}\\ \begin{array}{ccccccc}&&\uparrow&&\uparrow&&\\&&i&&j&&\end{array}&\end{array}$$

$$F_{ij}^t(\lambda)AF_{ij}(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & \boxed{a_{ii}} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{j1} & a_{ji} & \boxed{a_{jj}} & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{ni} & a_{nj} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

乘λ加下去

乘λ加右边

左乘初等矩阵 $F_{ij}^t(\lambda)$ 对A作行变换，
再右乘初等矩阵 $F_{ij}(\lambda)$ 作列变换得到B.

引理3：设 char(F) ≠ 2，$A\in SM_n(F)$. 若A中对角线上元素都等于零但 $A\neq 0$，则我们可以通过行列相伴变换把A变成对称矩阵 $B=(b_{ij})$ 使得 $b_{11}\neq 0$. 特别地，$A\sim_c B$.

证：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中某个 $a_{ij}\neq 0$，且 $i\neq j$. 则 $F_{ij}(1)^tAF_{ij}(1)$ 在第j行第j列处的元素是

$$a_{jj}+2a_{ij}+a_{ii}=2a_{ij}\neq 0.$$ （引理2和 char(F) ≠ 2）.

再由引理1得

$$B=F_{1j}\left(F_{ij}(1)^tAF_{ij}(1)\right)F_{1j}.$$ □

引理4. 设 char(F) ≠ 2，$A\in SM_n(F)$. 则我们可通过行列相伴变换得到对角矩阵.

证：$n=1$ 时，成立.

$n>1$ 时，设 $n-1$ 成立. 我们考虑n阶对称矩阵A. 如果 $A=0$，则A是对角阵. 下设 $A\neq 0$.

由引理3，我们可以进一步假设 $a_{11} \neq 0$.

（若 $a_{11}=0$，我们可通过行列相伴消元方法化成第一行第一列位置不为0.）

接下来的目标是把第一行第一列位置的正下方（正右方）都消为零，即

$$F_{1n}\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)^t \cdots F_{12}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^t A \underbrace{F_{12}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\cdots F_{1n}\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)}_{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

其中 $B \in SM_{n-1}$，由归纳假设知 $\exists\, Q \in GL_n(F)$ s.t $Q^t B Q$ 是对角阵.

令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

则 $(MP)^t A (MP)$ 是对角阵. □

eg2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in SM_3(\mathbb{R}).$$

利用行列相伴变换把 $A$ 化成对角阵 $B$，并计算 $P \in GL_3(\mathbb{R})$ s.t $B = P^t A P$.

解：行列相伴思想方法：Step 1: 第一行第一列先换成非零元.

Step 2: 第一行第一列正下方（正右方）化成零元.

Step 3: 第二行第二列正下方（正右方）化成零元.

⋮

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

由于右侧矩阵只做了一种变换（行变换）

而我们一般右乘初等阵表示做列变换. $= (B \mid P^t)$