第六次作业

1. $q = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上二次型.

(1) q 在标准基下的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

由初等变换或行列式可判断：$\operatorname{rank}(A) = 3$

(2) 法一：配方法.

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ i.e. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1\ (\text{可逆})} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ... ①

则 $q = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_3 + 4y_2y_3$

$= (y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - (y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 4y_3^2$

$= (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - 2y_3)^2 + 3y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ i.e. $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2\ (\text{可逆})} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ... ②

则 $q = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$ 签名 $(2,1)$

由①②可得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P_1P_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

计算 $P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 取规范基为 $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

此时规范型：$q = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$.

法二：行列相伴变换

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_2\text{加到}c_1]{r_2\text{加到}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_1\times(-\frac{1}{2})\text{加到}c_2]{r_1\times(-\frac{1}{2})\text{加到}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_1\text{加到}c_3]{r_1\text{加到}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_2\times(-4)\text{加到}c_3]{r_2\times(-4)\text{加到}r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{B} \qquad \underbrace{}_{P^t}$$

取 $P=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $P^tAP=B$

规范基取 P 的列向量 $\vec{p}^{(1)},\vec{p}^{(2)},\vec{p}^{(3)}$. 设 $\vec{y}=(\vec{p}^{(1)},\vec{p}^{(2)},\vec{p}^{(3)})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 则

$$q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2+3y_3^2. \qquad \text{签名}(2,1)$$

Note：规范基和规范型的取法不唯一. 但签名唯一.

A. $B\in SM_n(\mathbb{R})$ i.e. $A\sim_c B$. B对角阵. B取法不唯一, 但B对角线上 >0 和 <0 的元素个数是唯一的.

2. 求实二次型 $q(x_1,\cdots,x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的签名.

法一：配方法.

令 $\begin{cases} x_1 = y_1+y_2 \\ x_2 = y_1-y_2 \\ x_3 = y_3+y_4 \\ x_4 = y_3-y_4 \\ \quad\vdots \\ x_{2n-1} = y_{2n-1}+y_{2n} \\ x_{2n} = y_{2n-1}-y_{2n} \end{cases}$　　则 $q = y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2$

$\therefore$ 签名 (n,n)

法二：行列相伴变换.

q在标准基下对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$A \xrightarrow[\substack{c_{2k}\text{加到}c_{2k-1} \\ k=1,\cdots,n}]{r_{2k}\text{加到}r_{2k-1}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ & & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_{2k-1}\times(-\frac{1}{2})\text{加到}c_{2k} \\ k=1,\cdots,n}]{r_{2k-1}\times(-\frac{1}{2})\text{加到}r_{2k}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & -\frac{1}{4} & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & 0 & -\frac{1}{4} & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Note：矩阵中其余没写出来元素都是0.

对角阵. 对角线上 n个1，n个$-\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ q的签名 (n,n)

3. F 域. $A=\begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & A_1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} O_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B_1 \end{pmatrix}$ $A_1, B_1 \in GL_m(F)$.

证: $A\sim_c B \Leftrightarrow A_1 \sim_c B_1$

Pf: "$\Leftarrow$" 设 $A_1\sim_c B_1$. i.e. $\exists P_1\in GL_m(F)$ s.t. $B_1=P_1^t A_1 P_1$

令 $P=\begin{pmatrix} E_n & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & P_1 \end{pmatrix}\in GL_{n+m}(F)$. ($\because rank(P)=rank(E_n)+rank(P_1)=m+n$)

$$\text{则 } P^tAP=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}^t A\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n^t & 0 \\ 0 & P_1^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_1^tA_1P_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}=B \quad \therefore A\sim_c B$$

"$\Rightarrow$" 设 $A\sim_c B$. 即 $\exists P=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}\in GL_{n+m}(F)$. 其中 $P_1\in M_n(F)$, $P_4\in M_m(F)$

$P_2\in F^{n\times m}$, $P_3\in F^{m\times n}$

$$\text{则 } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}=B=P^tAP=\begin{pmatrix} P_1^t & P_3^t \\ P_2^t & P_4^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_3^tA_1P_3 & P_3^tA_1P_4 \\ P_4^tA_1P_3 & P_4^tA_1P_4 \end{pmatrix}$$

因此 $B_1=P_4^tA_1P_4$. 下证 P_4 可逆.

$\because m=rank(B_1)\le \min\{rank(P_4), rank(A_1)\}\le rank(P_4)\le m$. ($P_4$ 是 m 阶方阵)

$\Rightarrow rank(P_4)=m$. $\therefore P_4$ 可逆. 从而 $A_1\sim_c B_1$

4. $q\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 非0齐二次多项式. 证: q 在 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 可约 $\Leftrightarrow rank(q)\le 2$.

Pf: "$\Rightarrow$" 由大课讲义 eg 8.11 可知, q 可约蕴含 $rank(q)\le 2$.

"$\Leftarrow$" 设 $rank(q)\le 2$. 且 q 在 $\mathbb{C}^n$ 标准基下的矩阵为 A.

由讲义 eg 7.18. $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$P^tAP=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{其中 } r=1 \text{ or } 2.$$

设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$，则 $q(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$．令 $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)^t$，其中 $\vec{y}=P^{-1}\vec{x}$．则

$$\tilde{q}(\vec{y}):=q(P\vec{y})=\vec{y}^tP^tAP\vec{y}=y_1^2+\cdots+y_r^2.$$

下证：$q(\vec{x})$ 在 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 中可约 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{q}(\vec{y})$ 在 $\mathbb{C}[y_1,\cdots,y_n]$ 中可约．

若 $q(\vec{x})=f(\vec{x})g(\vec{x})$，其中 $f,g\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 是齐一次的．则 $\tilde{q}(\vec{y})=\underbrace{f(P\vec{y})}_{\tilde{f}(\vec{y})}\underbrace{g(P\vec{y})}_{\tilde{g}(\vec{y})}$．

若 $\tilde{q}(\vec{y})=\tilde{f}(\vec{y})\tilde{g}(\vec{y})$，其中 $f,g\in\mathbb{C}[y_1,\cdots,y_n]$ 是齐一次的．则 $q(\vec{x})=\underbrace{\tilde{f}(P^{-1}\vec{x})}_{f(\vec{x})}\underbrace{\tilde{g}(P^{-1}x)}_{g(\vec{x})}$

当 $r=1$ 时，$\tilde{q}(\vec{y})=y_1^2$；当 $r=2$ 时，$\tilde{q}(\vec{y})=y_1^2+y_2^2=(y_1+\sqrt{-1}\,y_2)(y_1-\sqrt{-1}\,y_2)$

i.e. 在这两种情况下 $\tilde{q}(\vec{y})$ 在 $\mathbb{C}[y_1,\cdots,y_n]$ 中都是可约的．因此 $q(\vec{x})$ 也在 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 也是可约的．

5．设 $q\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 非0齐二次多项式．证：

q 在 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中可约 $\Longleftrightarrow$ 或者 $\mathrm{rank}(q)=1$ 或者 q 的签名是 $(1,1)$

Pf：设 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$，$q(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$，其中 $A\in SM_n(\mathbb{R})$．由课上讲义，$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t.

$$P^tAP=\begin{pmatrix}E_k&0&0\\0&-E_l&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)^t$，其中 $\vec{y}=P^{-1}\vec{x}$．则

$$\tilde{q}(\vec{y}):=q(P\vec{y})=y^tP^tAPy=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+l}^2$$

类似习题4中的证法可证明：$q(\vec{x})$ 在 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中可约 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{q}(\vec{y})$ 在 $\mathbb{R}[y_1,\cdots,y_n]$ 中可约

"$\Longrightarrow$" q 在 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ 中可约．$\therefore$ $\tilde{q}(\vec{y})$ 在 $\mathbb{R}[y_1,\cdots,y_n]$ 中可约．由课上讲义 eg 8.11 可知 $\mathrm{rank}(\tilde{q})\le 2$．于是 $\tilde{q}(\vec{y})$ 只可能是下述五种情况：

$$\tilde{q}=y_1^2,\quad \tilde{q}=-y_1^2,\quad \tilde{q}=y_1^2+y_2^2,\quad \tilde{q}=y_1^2-y_2^2,\quad \tilde{q}=-y_1^2-y_2^2$$

其中只有 y_1^2，$-y_1^2$ 和 $y_1^2-y_2^2$ 可约．i.e. $\mathrm{rank}(q)=1$ 或 q 的签名是 $(1,1)$．

"$\Leftarrow$" $\mathrm{rank}(q)=1$ 或 q的签名是$(1,1)$，此时 $q(\vec{y})$只可能是 y_1^2，$-y_1^2$，$y_1^2-y_2^2$。
它们都是可约的，因此 $q(\vec{x})$在$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$也是可约的。

Note：

1. $q\in F[x_1,\cdots,x_n]$ 非0齐二次多项式，F域。

① 考虑q的分解问题（or 是否可约）时，将其看作多项式环 $\underbrace{F[x_1,\cdots,x_n]}_{\text{是UFD}}$ 中元素。

② 将q看作二次型时，此时将其看成 $\underline{\text{多项式函数}}$ $q: F^n\longrightarrow F$，$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\mapsto p(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$
由赋值定理可将未定元看成变元。

eg 8.11. 设$q\in F[x_1,\cdots,x_n]$非0齐二次，如果q可以分解为两个一次多项式之积（看成多项式环中元素）
则q作为F^n上的二次型的秩不高于2.（看成多项式函数 $q: F^n\longrightarrow F$）

2. ① $A\in SM_n(\mathbb{C})$ 且 $r=\mathrm{rank}(A)$，则 $A\sim_c\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

② $A\in SM_n(\mathbb{R})$，则$\exists\ k,l\in\mathbb{N}$ s.t. $A\sim_c\begin{pmatrix}E_k&0&0\\0&-E_l&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 且 $k+l=\mathrm{rank}(A)$.

如果 $A\sim_c\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=s$，$t=l$.

可以判断两个实/复对称矩阵是否是合同的：

① $A,B\in SM_n(\mathbb{C})$，$A\sim_c B\iff\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

② $A,B\in SM_n(\mathbb{R})$，$A\sim_c B\iff A,B$有相同签名.