第六次习题课

一、作业中的问题

1. (1) 法1：根据线性空间的定义来证.

$(\mathcal{L}_2(V), +, 0)$ 是交换群 $\quad \forall f, g \in \mathcal{L}_2(V),\ \alpha, \beta \in F.$

$$(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$$
$$1 \cdot f = f$$
$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$$
$$(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$$

法2：根据子空间来证：

$Map(V\times V, F)$ 是 F 上线性空间，其中加法、数乘定义如下.

$f, g \in Map(V\times V, F) \quad \alpha \in F.$

$$f+g: V\times V \longrightarrow F \qquad \alpha f: V\times V \longrightarrow F$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y}) \qquad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \alpha f(\vec{x}, \vec{y})$$

$\mathcal{L}_2(V) \subset Map(V\times V, F) \qquad \mathcal{L}_2^+(V),\ \mathcal{L}_2^-(V) \subset \mathcal{L}_2(V).$

Step 1：由于 $Map(V\times V, F)$ 是 F 上线性空间，且 $\mathcal{L}_2(V) \subset Map(V\times V, F)$

故若 $\mathcal{L}_2(V)$ 为 $Map(V\times V, F)$ 为子空间，即证.

Step 2：$\forall f, g \in \mathcal{L}_2(V),\ \forall \alpha, \beta \in F. \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_2(V).$

即证 $\alpha f + \beta g$ 关于两个分量分别满足线性性即可.

(2). $\forall f, g \in \mathcal{L}_2^+(V),\ \alpha, \beta \in F$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_2^+(V). \qquad \mathcal{L}_2^-(V)$ 同理.

(3). Step 1：$\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{L}_2^+(V) + \mathcal{L}_2^-(V)$

Step 2：$\mathcal{L}_2^+(V) \cap \mathcal{L}_2^-(V) = \{0\}.$

(证明见讲义 7.10).

设 $u(x,y)=\dfrac{f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})}{2}$　　$v(x,y)=\dfrac{f(\vec{x},\vec{y})-f(\vec{y},\vec{x})}{2}$

即 $u\in\mathcal{L}_2^+(V)$, $v\in\mathcal{L}_2^-(V)$ 且 $\exists f\in\mathcal{L}_2(V)$, $f=u+v$.

2. (1) 利用结论:

$\forall\alpha,\beta\in F$, $A,B\in M_n(F)$

$$\begin{cases} tr(\alpha A+\beta B)=\alpha tr(A)+\beta tr(B) \\ tr(AB)=tr(BA). \end{cases}$$

验证: $f(\alpha A+\beta C,B)=\alpha f(A,B)+\beta f(C,B)$

$f(A,\alpha B+\beta C)=\alpha f(A,B)+\beta f(A,C)$.

过程略.

$f(A,B)=f(B,A)$.

(2). $\vec{e_1}=E_{11}$　$\vec{e_2}=E_{12}$　$\vec{e_3}=E_{21}$　$\vec{e_4}=E_{22}$.

设 $A=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}+x_4\vec{e_4}$

$B=y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}+y_3\vec{e_3}+y_4\vec{e_4}$

$f(A,B)=x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_4y_4$

设所求矩阵 $(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{4\times4}$　即 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$rank(f)=4$.

3. (1) 思路同2(1).

(2). 设 $\vec{e_1}=1$, $\vec{e_2}=x$, $\cdots$, $\vec{e_n}=x^{n-1}$

f 在 $\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots\vec{e_n}$ 下的矩阵为 $A=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{n\times n}$

计算得

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\cdots&\frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{4}&\frac{1}{5}&\cdots&\frac{1}{n+2}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{1}{n}&\frac{1}{n+1}&\frac{1}{n+2}&\cdots&\frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

下述说明 A 为满秩矩阵. ($rank\,f=rank(A)=n$).

a. $\det A \neq 0$.

归纳假设法(利用行列式性质).

b. 考虑齐次线性方程组 $A\vec{y}=\vec{0}$ 只有零解.

假设 $\vec{a}=(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^t$ 是上述方程的解. 即 $A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\vec{0}$.

且令 $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

则 $f(a,a)=\int_0^1 a^2(x)\,dx=0$.

$\left(\because f(a,a)=(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})\underbrace{A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1}\end{pmatrix}}_{\vec{0}}=0\right)$.

c. 对偶思想:

考虑 $g_i: \mathbb{R}[x]^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longmapsto f(p, x^{i-1})$.

$$A = M\begin{pmatrix} g_1, & g_2 & \cdots & g_n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1}\end{pmatrix}$$

引理6.9: $1, x, \cdots x^{n-1}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \cdots & g_n \\ 1, & \cdots, & x^{n-1}\end{pmatrix}\right) < n$

$\geq n$

无

$\operatorname{rank}(A) \leq n \implies \operatorname{rank}(A)=n$.

4. 降维法：取 $\mathbb{R}^3$ 标准基 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$.

设 $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, x_2, x_3) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\because$ A对称 $\therefore f \in \mathcal{L}_2^+(\mathbb{R}^3)$.

且 A是 f在 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 下的矩阵 即 $A = (f(\vec{e_i}, \vec{e_j}))_{3\times 3}$.

Step 1. a. 取 $\vec{\varepsilon_1}$ s.t $f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_1}) \neq 0$. 令 $\vec{\varepsilon_1} = \vec{e_2}$. 则 $f(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_1}) = -1 \neq 0$.

b. 确定 $W = \ker(f(\vec{x}, \vec{\varepsilon_1}))$ 的一组基.

计算 $f(\vec{x}, \vec{\varepsilon_1}) = x_1 + x_2 + 2x_3$

解 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 得 W 的一组基

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c. 求 $g := f|_{W\times W}$ 在 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 的矩阵.

$$B = \begin{pmatrix} f(\vec{w_1}, \vec{w_1}), & f(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \\ f(\vec{w_2}, \vec{w_1}), & f(\vec{w_2}, \vec{w_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

至此降维到 W上的对称双线性型 g.

Step 2. a. 取 $\vec{\varepsilon_2}$ s.t $g(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_2}) \neq 0$. 令 $\vec{\varepsilon_2} = \vec{w_2}$

$g(\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_2}) = f(\vec{w_2}, \vec{w_2}) \neq 0$.

b. 确定 $Z = \ker(g(\vec{y}, \vec{\varepsilon_2}))$ 的一组基

计算 $g(\vec{y}, \vec{\varepsilon_2}) = y_1 + y_2 = 0$.

解 $y_1 + y_2 = 0$ 得 Z 的一基.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Z的基 } (\vec{w_1}, \vec{w_2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

于是 f 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范基是

$\vec{\varepsilon_1}=\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\varepsilon_2}=\vec{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{\varepsilon_3}=\vec{w_1}-\vec{w_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

从 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 到 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}$ 的矩阵是 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$$P^tAP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

法二：行列相伴.

$$(A|E)\longrightarrow(E|P^t).$$

i) $r_1\longleftrightarrow r_2$ 换

ii) r_1 加到 r_2

iii) r_1 加到 r_3

iv) $r_2\times(-1)$ 加到 r_3.

法三：$g(x)=-x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3$

$$=-(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2$$

$$\begin{cases}y_1=-x_1+x_2-x_3\\y_2=x_1+x_3\\y_3=x_3.\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$p(x)=-y_1^2+y_2^2$$

$$p=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(y_1,y_2,y_3)(P^{-1})^tAP^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$=(y_1,y_2,y_3)\,diag(-1,1,0)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

二、课程内容回顾与补充

7.3. Jacobi 公式

$$A \sim diag\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

8.1. 二次型与对称双线性函数关系.

rank(q) 的定义.

q在不同基下的矩阵合同.

8.2 配方法化规范型.

作业题4的方法三.

$$Q(V) \cong \mathcal{L}_2^+(V) \cong SM_n(F).$$

9.1 惯性定理

计算签名.

eg 1: 计算$\mathbb{R}^3$上二次型 $q(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的一组规范基和在该基下的规范型, 并计算q的签名。

解: 二次型q在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) \to \cdots \longrightarrow (B|P^t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

计算略.

[但是需要注意做了行变换只需对称化即可]

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{matrix} \end{array}$$

则 $P^{t}AP = diag(1, -1, 0)$

q 在 $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$ 下(即 P 的列向量下)的矩阵是 $diag(1, -1, 0)$.

设 $\vec{y} = y_1\vec{\varepsilon_1} + y_2\vec{\varepsilon_2} + y_3\vec{\varepsilon_3}$. 则

$$q(\vec{y}) = y_1^2 - y_2^2.$$

配方法: $q = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{设} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则 $q = y_1^2 - y_2^2$ 规范基为 Q^{-1} 的列向量. $\square$

q 的签名 $(1, 1)$.

eg 2. 计算 $\mathbb{R}^n$ 上二次型 $P_n = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} 2x_ix_j$ 的签名.

解: P_n 在标准基下的矩阵

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $n=2$ 时

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称化}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{对称化}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

签名 $(1, 1)$.

当 $n=3$ 时，顺序主子式来计算（eg.7.21）签名 $(1,2)$。

现考虑 A_n。

用行列相伴的一般步骤可得 $A_n \sim_c \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix}$。

其中 $M=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 和 $N=-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$

注意到 $|N|=\det(N)=(-2+(n-3)(-1))(-1)^{n-3}=(1-n)(-1)^{n-3}$，$n=3,4$.

（结论见上学期讲义）.

设 Δ_i 是 N 的 i 阶主子式，$i=1,2,\cdots,n-2$. 且 $\Delta_0=1$. 则 $\Delta_{i+1}/\Delta_i<0$,

$i=1,2,\cdots,n-2$. 由 Jacobi 公式

$$N \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}}\right) \sim_c -E_{n-2}.$$

$\exists\ P\in GL_n(F)$ 和 $Q\in GL_{n-2}(F)$. s.t

$$\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}^t P^t A_n P \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & O \\ O & -E_{n-2} \end{pmatrix}$$

□.

P_n 的签名 $(1,\ n-1)$.