第七次习题课

一、作业中需要注意的问题

1. (1) 二次型下的矩阵 即 $q(x)=a_{ii}x_i^2+2a_ia_j x_ix_j$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(2). 化规范型

i> 行列相伴 $(A\mid E)\to\cdots\to(B\mid P^t)$

则 B 对应的规范基为 $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$。

若设B对应规范基为 $\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}$ 则 $(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})P=P$.

ii> 配方法: $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=P_2\begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$(x_1,x_2,x_3)^t=P_1P_2^{-1}(z_1,z_2,z_3)^t$

若还需再分: $\begin{cases} w_1= \\ w_2= \\ w_3= \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=P_3\begin{pmatrix} z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$

$(x_1,x_2,x_3)^t=P_1P_2^{-1}P_3^{-1}(w_1,w_2,w_3)^t$

规范基: $(P_1P_2^{-1}P_3^{-1}\cdots)^{(1)}$ $\quad (P_1P_2^{-1}P_3^{-1}\cdots)^{(2)}$ $\quad (P_1P_2^{-1}P_3^{-1}\cdots)^{(2)}$

规范基与规范型不唯一.

在实数域中,对角线上正、负个数固定。

2. i) 配方法.

ii) 行列相伴:

重点为矩阵: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

3. 证: 即证: $P^tAP=B$ ($\exists P$ s.t $B=P^tAP$)

$\Longleftrightarrow P_1^tA_1P_1^t=B_1$ ($\exists P_1$ s.t $B_1=P_1^tA_1P_1^t$)

"$\Leftarrow$" 比较容易 构造 $P=\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \in GL_{n+m}(F)$

"$\Rightarrow$" 设 $P=\begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$ $P_4 \in M_{n\times n}$ $P_2 \in M_{m\times n}$ $P_3 \in M_{n\times m}$ $P_1 \in M_{m\times m}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = B = P^tAP = \begin{pmatrix} P_4^t & P_2^t \\ P_3^t & P_1^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_2^tA_1P_2 & P_2^tA_1P_1 \\ P_1^tA_1P_2 & P_1^tA_1P_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B_1=P_1^tA_1P_1^t$ P_1 非退化. □

$m=\text{rank}(B_1) \le \min\{\text{rank}(A_1), \text{rank}(P_1)\} \le \text{rank}(P_1) \le m$

"$\Rightarrow$"

4. "$\Leftarrow$" 设 $\text{rank}(A)\le 2$, 且 q 在 $\mathbb{C}^n$ 标准基下的矩阵为 A

由 eg.7.18 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ $P^tAP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r=1$ or 2.

$q(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$

$$q=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{(x_1,\cdots x_n)(P^{-1})^t}_{(y_1,\cdots,y_n)^t}\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{y_1}$$

$p = y_1^2 + \cdots + y_r^2$

$r=1 \quad p = y_1^2$

$r=2 \quad p = (y_1 + \sqrt{-1}\,y_2)(y_1 - \sqrt{-1}\,y_2)$

y_1, y_2 都是关于 $x_1, \cdots x_n$ 的多项式

在 $\mathbb{C}[y_1, y_2, \cdots y_n]$ 中可约，故在 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots x_n]$ 中可约。 $\square$

5. 解 $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$q = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{(x_1, \cdots, x_n)(P^{-1})^t}_{(y_1, y_2, \cdots, y_n)} \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

$\tilde{q}(y) := q = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+l}^2$

由 $q(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x})$，其中 $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \cdots x_n]$ 齐一次

$$\tilde{q}(\vec{y}) = \underbrace{f(P\vec{y})}_{\tilde{f}(\vec{y})}\underbrace{g(P\vec{y})}_{\tilde{g}(\vec{y})}$$

$\tilde{q}$ 在 $\mathbb{C}[y_1, y_2, \cdots y_n]$ 可约。

由 eg 8.11. $\Rightarrow \operatorname{rank}(\tilde{q}) \le 2$. 故有下述五种情形:

$\underline{\tilde{q} = y_1^2} \qquad \underline{\tilde{q} = -y_1^2} \qquad \tilde{q} = y_1^2 + y_2^2 \qquad \underline{\tilde{q} = y_1^2 - y_2^2} \qquad \tilde{q} = -y_1^2 - y_2^2$

三种可约 i.e. $q = 1$ or $(1,1)$.

$\Leftarrow \quad q = 1$ or $(1,1)$ 即 $y_1^2 - y_2^2,\ y_1^2,\ -y_1^2$ 可约。 $\square$

4和5题总结：1: 注意数域不同带来的变化

2. (i) $\mathbb{C} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\mathbb{R} \qquad A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

二. 课程内容回顾与补充

9.2 (半)正定二次型

分别对应签名的五种情形.

9.3 (半)正定矩阵的等价条件

i) A (半)正定 $\Longleftrightarrow$ $\exists$ $B\in (M_n(\mathbb{R}))\ GL_n(\mathbb{R})$ s.t $A=B^tB$.

ii) 等价条件:

A 正定

$\Longleftrightarrow$ A 的任何 k 阶主子式大于 0

$\Longleftrightarrow$ $\Delta_1>0, \cdots, \Delta_n>0$.

A 半正定

$\Longleftrightarrow$ A 的任何 k 阶主子式大于等于 0

iii) Hadamard inequality.

10.1 仿射变换

体会"签名"的重要性, 以及二次曲线和二次曲面分类所体现的图形的直观感受.

$$\rho: V \longrightarrow V$$

$$\vec{x} \longmapsto \underbrace{\phi(\vec{x})}_{\text{转一下}} + \underbrace{\vec{v}}_{\text{平移}}$$

eg1: 设 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型是

$$q=2(x_1-x_2)^2+3(x_1+x_2+x_3)^2+7(x_1-x_2+x_3)^2-(3x_2-x_1)^2$$

确定 q 的类型。

解: 令 $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_1+x_2+x_3$, $y_3=x_1-x_2+x_3$, $y_4=3x_2-x_1$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则 $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$ 线性无关. 而 $\vec{A_4}$ 是 $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$ 的线性组合. 事实上

$$\vec{A_4} = -\vec{A_1} + \vec{A_2} - \vec{A_3}$$

考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A_1} \\ \vec{A_2} \\ \vec{A_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

则 $y_4 = -y_1 + y_2 - y_3$. 在新的坐标下,

$$q = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2 - (y_1 - y_2 + y_3)^2 = y_1^2 + 2y_2^2 + 6y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_2y_3 - 2y_1y_3.$$

q 在新的坐标下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

B的顺序主子式分别是 1, 1 和 1. 于是 B 正定. □.

eg 2. 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明存在 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.t $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$.

证明: 因为 $\det(A) \neq 0$, 所以 A 或者正定, 或者负定, 或者不定.

$\because \det(A) < 0$

$\therefore$ A 非正定.

① A 负定时, 对 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$.

② A 不定. 则 $\exists\, \vec{x} \in V$, s.t $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$.

否则 $\forall\, \vec{x} \in V$, $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$

$$\begin{cases} = 0 & \vec{x} = 0 \\ > 0 & A\text{正定} \quad \text{矛盾}. \end{cases}$$

□

eg3. 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵. 证明 A^2 是正定矩阵.

证明: $\because$ A 正定, $\therefore$ $\exists$ $P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$.

故 $A^2=(P^tP)(P^tP)=P^t(PP^t)P \sim_c \underbrace{PP^t}_{Q}$

$\because$ $Q=(P^t)^tP^t$, $\therefore$ Q 正定, 从而 A^2 正定. $\square$

引理1: 设 q 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间 V 上的二次型. 则 q(半)正定 $\Longleftrightarrow$ $-q$(半)负定. 类似地, 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$. 则 A(半)正定 $\Longleftrightarrow$ $-A$(半)负定.

证明: 设 $\vec{x}\in V$ 任意. 则 $\square$

$q(\vec{x})\geq 0 \Longleftrightarrow -q(\vec{x})\leq 0$ 和 $q(\vec{x})>0 \Longleftrightarrow -q(\vec{x})<0$.

eg4. 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$, $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ 是 A 的顺序主子式. 证明:

A 负定 $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$.

证明: 设 $\Omega_1,\cdots,\Omega_n$ 是 $-A$ 的顺序主子式. 则由行列式性质: $\Omega_i=(-1)^i\Delta_i$, $i=1,2\cdots$

由 $-A$ 正定 $\Longleftrightarrow$ $\Omega_1>0$, $\Omega_2>0$, $\cdots$, $\Omega_n>0$, 即 $(-1)^k\Delta_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$.

由引理1可知, A 负定 $\Longleftrightarrow$ $(-1)^k\Delta_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$ $\square$

三. 分块行列相伴消元

命题: 设 $B\in SM_{n-1}(F)$ 可逆, $\vec{v}\in F^{n-1}$, 且 $a\in F$. 令

$$A=\begin{pmatrix} B & \vec{v} \\ \vec{v}^t & a \end{pmatrix}$$

则 (i) 设

$$P=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -B^{-1}\vec{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

则 $$P^tAP=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}$$

(ii) $\det(A)=\det(B)(a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v})$.

(iii) 设 $B\sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$. 则 $A\sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}, a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v})$

证：(i) B^{-1}对称.

直接计算得 $$P^tAP=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}$$

(ii) $\det(P)=1$

$\Rightarrow \det(A)=\det(P^tAP)=\det(B)(a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v})$.

(iii) 设 $Q\in GL_{n-1}(F)$ s.t $Q^tBQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$. 则

$$C^t\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-\vec{v}^tB^{-1}\vec{v} \end{pmatrix}$$

□.

eg5. 设 $B\in SM_{n-1}(\mathbb{R})$正定, $\vec{v}\in\mathbb{R}^{n-1}$, 且 $a\in\mathbb{R}$. 令

$$A=\begin{pmatrix} B & \vec{v} \\ \vec{v}^t & a \end{pmatrix}.$$

证明：如果 $\det(A)=0$, 则A半正定。

证：$\because$ B正定

$\therefore B\sim_c E_{n-1}$.

由(iii)知 $$A\sim_c\underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{M}$$

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(M)$. M非满秩, $\alpha=0$. A签名 $(n-1,0)$ 半正定. □