第八次习题课

一、作业中需要注意的地方

2. 实二次型 $\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 在 λ 取什么值时是负定的。

解：q 在标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

法一：行列相伴消元

$$A \sim_c \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda+\frac{3}{5}\end{pmatrix} \qquad \lambda+\frac{3}{5}<0$$

法二：A 负定 $\Leftrightarrow -A$ 正定

即 $-A=\begin{pmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ 的各阶顺序主子式都大于0.

$$\begin{cases}\Delta_1=-\lambda>0\\ \Delta_2=-2\lambda-1>0\\ \Delta_3=-5\lambda-3>0\end{cases} \Rightarrow \lambda<-\frac{3}{5}$$

3. $A\in M_n(\mathbb{R})$ 证

(1) $A\in SSM_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}^tA\vec{x}=0$

(2) 若 $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 且 $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}^tA\vec{x}=0$. 则 $A=0$.

证："$\Rightarrow$" $A^t=-A$. $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$

$\vec{x}^tA\vec{x}=(\vec{x}^tA\vec{x})^t=-\vec{x}^tA\vec{x}$ $\quad char(\mathbb{R})\neq 2$. $\vec{x}^tA\vec{x}=0$.

"$\Leftarrow$" $0=\vec{x}^tA\vec{x}=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$

当 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 时 $\Rightarrow a_{ii}=0$. 当 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow i\\ \\ \leftarrow j\end{matrix}$ $\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0$

(2) 由(1)知. $A^t=-A$ 又 $A^t=A$.

故 $A=A^t=-A$ $char(\mathbb{R})\neq 2$. $\therefore A=0$.

4. 证明: (1) $q(A)=tr(A^tA)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的正定二次型.

(2) 若 $A^tA=A^2$, 则 A 是对称矩阵。

证: 首先根据定义来证二次型, 其次判断二次型正定。

定义8.1: 设 $q: V\longrightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果

(i) 对于任意的 $\vec{v}\in V$, $q(\vec{v})=q(-\vec{v})$;

(ii) 对于任意的 $\vec{x},\vec{y}\in V$.

$$f(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y})-q(\vec{x})-q(\vec{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极。

Step 1: $q(-A)=tr((-A)^t(-A))=tr(A^tA)=q(A)$.

令 $f(A,B)=\frac{1}{2}[q(A+B)-q(A)-q(B)]$

$$=\frac{1}{2}[tr((A+B)^t(A+B))-tr(A^tA)-tr(B^tB)]$$

$$=\frac{1}{2}[tr(A^tA+B^tA+A^tB+B^tB)-tr(A^tA)-tr(B^tB)]$$

$$=\frac{1}{2}tr(B^tA)+\frac{1}{2}tr(A^tB)$$

$$=f(B,A).$$

Step 2. 判断正定.

$$tr(A^tA)=tr\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{i1}^2 & & & \\ & \sum_{i=1}^n a_{i2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^n a_{in}^2\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}^2>0.$$

(2). $g(A-A^t)=tr((A-A^t)^t(A-A^t))$

$=tr((A^t-A)(A-A^t))$

$=tr(A^tA-A^2-A^tA^t+AA^t)$

$=tr(AA^t-A^tA^t)=tr(AA^t)-tr(A^tA^t)$

又 $A^tA^t=(A^t)^2=(A^2)^t=(A^tA)^t=A^tA$

且 $tr(A^tA)=tr(AA^t)$

$\therefore g(A-A^t)=0$

g是正定二次型. $A-A^t=0$ $A=A^t$ □.

5. 设A是任意一个实对称矩阵，$\varepsilon=\varepsilon(A)$是一个充分小的实数. 证明:矩阵 $B=E+\varepsilon A$是正定的.

证: B的k阶顺序主子式记为Δ_k

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1k} \\ \varepsilon a_{12} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{1k} & \varepsilon a_{2k} & \cdots & 1+\varepsilon a_{kk} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon_\sigma b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}\cdots b_{\sigma(k)k}$$

$$=b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}+\sum_{\sigma\in S_k\setminus\{1\}}\varepsilon_\sigma b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(k)k}$$

记作 $=1+c_{k1}\varepsilon+c_{k2}\varepsilon^2+\cdots+c_{kk}\varepsilon^k$

$C_k=\max\{|c_{ki}|\}$.

$\Delta_k\geq 1-C_k\varepsilon-C_k\varepsilon^2-\cdots-C_k\varepsilon^k$ 令 $0<\varepsilon<\frac{1}{C_k+1}$

则 $\Delta_k\geq 1-C_k(\varepsilon+\cdots+\varepsilon^k)$

$$=1-C_k\frac{\frac{1}{C_k+1}\left(1-\frac{1}{(C_k+1)^k}\right)}{1-\frac{1}{C_k+1}}=(C_k+1)^{-k}>0$$

令 $C=\min\left\{\frac{1}{C_1+1}, \frac{1}{C_2+1}, \cdots \frac{1}{C_n+1}\right\}>0$，则 $0<\varepsilon<C$

$\Delta_k>0$.

或把 Δ_k 看成关于 ε 的连续函数. $\Delta_k(\varepsilon)$

$\because \varepsilon=0$, $\Delta_k=1>0$. $\therefore \exists \delta_k>0$ s.t $\forall \varepsilon\in(-\delta_k,\delta_k)$ $\Delta_k(\varepsilon)>0$.

$\therefore \exists \delta>0$ s.t $0<\varepsilon<\delta$ 时. $\Delta_k>0$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_k\}$

故 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 时，$E+\varepsilon A$ 正定。

□.

二. 由习题4引申的补充知识:

双线性型:
$$V\times V \longrightarrow F$$
$$\vec{x}\quad \vec{y} \longmapsto f(\vec{x},\vec{y})$$

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z})$$
$$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z}).$$

对称双线性型: $f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$.

有极化公式:
$$f(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}\left(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})-f(\vec{x},\vec{x})-f(\vec{y},\vec{y})\right).$$

二次型:
$$V\longrightarrow F$$
$$\vec{v}\longmapsto q(\vec{v}).$$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}\left(q(\vec{x}+\vec{y})-q(\vec{x})-q(\vec{y})\right).$$

由两个变元转为一个变元，其次由二次型即可以看出对称性。

三. 课程内容回顾

双线性型 → 对称双线性型 ⟶ 二次型 ⟶ 实二次型

双线性型 → 斜对称双线性型
- 1. 辛平面

  Thm 11.6：设 V 是 F 上的有限维线性空间，$f\in \mathcal{L}_2(V)$，则存在 f 的辛平面 $W_1,\cdots,W_k$ 和子空间 U 满足

  (i) $V=W_1\oplus W_2\oplus W_3\oplus\cdots\oplus W_k\oplus U$

  (ii) $f|_{U\times U}$ 零线性型

  (iii) $\vec{x}\in W_1\oplus\cdots\oplus W_i$　$\vec{y}\in W_{i+1}\oplus\cdots\oplus U$

  $f(\vec{x},\vec{y})=0$.

- 3. 秩为偶数（若 $A\in SSM_n(F)$）.

12. 直和与投影

1. 正交：$\sigma_i\circ\sigma_j=0$
   等方：$\sigma_i\circ\sigma_i=\sigma_i$
   完全：$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$ 恒同
   } $\sigma_1,\cdots\sigma_k$ 是完全正交等方组.

2. $V=im(\sigma_1)\oplus im(\sigma_2)\oplus\cdots\oplus im(\sigma_k)$　σ_i 是关于上述直和第 i 个投影.

第二章：不同基底下线性映射的矩阵表示.

(补充) eg 1.6：设 $A\in F^{m\times n}$，$\varphi: F^{n\times k}\to F^{m\times k}$ 由公式 $\forall X\in F^{n\times k}$

$\varphi(X)=AX$ 给出. 求 φ 在标准基下的矩阵.

解：记 $X=(\vec{x}^{(1)},\vec{x}^{(2)},\cdots,\vec{x}^{(k)})$　$AX=(A\vec{x}^{(1)},A\vec{x}^{(2)},\cdots A\vec{x}^{(k)})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\| \;\; (\overrightarrow{\varphi(X)}^{(1)},\overrightarrow{\varphi(X)}^{(2)}\cdots\overrightarrow{\varphi(X)}^{(k)})$.

还是需要用到 $F^{m\times k}$ 与 F^{mk} 是线性同构.

$\varphi: F^{n\times k} \longrightarrow F^{m\times k}$

$(\vec{x}^{(1)} \cdots \vec{x}^{(k)}) \longmapsto (\overrightarrow{\varphi(x)}^{(1)} \cdots \overrightarrow{\varphi(x)}^{(k)})$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad (A\vec{x}^{(1)} \cdots A\vec{x}^{(k)})$

$\psi: F^{nk} \longrightarrow F^{mk}$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}^{(1)} \\ \vec{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{x}^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overrightarrow{\psi(x)}^{(1)} \\ \overrightarrow{\psi(x)}^{(2)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\psi(x)}^{(k)} \end{pmatrix}$$

nk行1列

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi(x)}^{(1)} \\ \overrightarrow{\varphi(x)}^{(2)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\varphi(x)}^{(k)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{m\times n} & & & \\ & A_{m\times n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{m\times n} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \vec{x}^{(1)} \\ \vec{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{x}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$km\times kn$

$Z_{ij}\in F^{n\times k}$ $\quad L_{ij}\in F^{m\times k}$ 分别是两个矩阵空间标准基。

F^{nk} 所对应 $F^{n\times k}$ $\qquad\qquad$ F^{mk} 所对应 $F^{m\times k}$

$\vec{e}_i$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vec{\varepsilon}_i$

$i\in\{1,2,\cdots,nk\}$ $\qquad\qquad$ $i\in\{1,2,\cdots,mk\}$.

$F^{n\times k}$标准基: $Z_{11}, Z_{21}, \cdots Z_{n1}; Z_{12}, Z_{22}, Z_{32}, \cdots Z_{n2}; \cdots Z_{1k}, \cdots Z_{nk}$.

$F^{m\times k}$ $\quad L_{11}, L_{21}, \cdots L_{m1}; L_{12}, L_{22}, L_{32}, \cdots L_{m2}; \cdots L_{1k}, \cdots L_{mk}$.

Remark: 设 V, W 是线性空间，基底分别为 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m$

设 $\alpha: V \longrightarrow V'$, $\beta: W \longrightarrow W'$ 是线性同构. 设 $\varphi\in Hom(V, W)$.

则 (i) $\psi = \beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1} \in Hom(V', W')$.

(ii) ψ在 $\alpha(\vec{e}_1), \alpha(\vec{e}_2), \cdots \alpha(\vec{e}_n)$; $\beta(\vec{\varepsilon}_1), \cdots \beta(\vec{\varepsilon}_n)$ 基下的矩阵

与 φ在 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m$ 下的矩阵相同.

证：(i) 由下列交换图：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ V' & \xrightarrow{\psi} & W' \end{array}$$

$\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}$

(ii) 设 $(\varphi(\vec{e_1}),\cdots\varphi(\vec{e_n}))=(\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_m})A$.

$\psi(\alpha(\vec{e_1}),\cdots\alpha(\vec{e_n}))$

$=(\beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}\circ\alpha(\vec{e_1})\cdots\ \beta\circ\varphi\circ\alpha^{-1}\circ\alpha(\vec{e_n}))$

$=\beta(\varphi(\vec{e_1}),\cdots\varphi(\vec{e_n}))$

$=\beta((\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_m})A)$

$=(\beta(\vec{\varepsilon_1}),\cdots\beta(\vec{\varepsilon_m}))A$.

现考虑矩阵空间：$vec: F^{m\times n}\longrightarrow F^{mn}$

$$A_{m\times n}\longmapsto\begin{pmatrix}\vec{A}^{(1)}\\ \vdots\\ \vec{A}^{(n)}\end{pmatrix}$$ 是线性同构.

vec称为矩阵的向量化

eg. 设 $m=n=k=2$　　$\varphi: M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $X\mapsto AX$.

$\psi: vec\circ\varphi\circ vec^{-1}: \mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^4$

$\psi(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4})M$　　$M=\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$.

注意到 $vec^{-1}(e_1)=E_{11}$　$vec^{-1}(e_2)=E_{21}$　$vec^{-1}(e_3)=E_{12}$　$vec^{-1}(e_4)=E_{22}$

$\varphi(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})=(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})M$

$\varphi(E_{11})=a_{11}E_{11}+a_{21}E_{21}=\begin{pmatrix}a_{11}&0\\a_{21}&0\end{pmatrix}$