第八次作业

1. (1) 由 φ 的定义可知

$$(\varphi(\vec{e}_1),\varphi(\vec{e}_2),\varphi(\vec{e}_3))=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{A}$$

φ 在给定基底下矩阵是 A.

(2). 计算得 $\operatorname{rank}(A)=2$. $\Rightarrow \operatorname{rank}(\varphi)=2$. 由对偶定理可得 $\dim(\ker\varphi)=1$.

$\varphi: V\to W$. $\quad \ker\varphi=\{\vec{x}\in V \mid A\vec{x}=\vec{0}\}$. 计算得 $sol(A\vec{x}=\vec{0})$ 基底 $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{x}\longmapsto A\vec{x}$. $\quad \therefore \ker\varphi$ 的基底是 $3\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$

(3).

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}}_{P},\quad (\vec{w}_1,\vec{w}_2)=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}}_{Q}.$$

$\because |P|\neq 0, |Q|\neq 0 \quad \therefore P, Q$ 都可逆. $\therefore \vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 是 V 的一组基

$\vec{w}_1,\vec{w}_2$ 是 W 的一组基.

$\Rightarrow \varphi$ 在 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$; $\vec{w}_1,\vec{w}_2$ 下的矩阵是

$$Q^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}&1\\-1&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$$

2. q_n 在标准基下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\cdots&\frac12\\\frac12&1&\cdots&\frac12\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac12&\frac12&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

对角线上元素为1. 其余元素为 $\frac12$.

设 $\Delta_0=1$. A 第 i 阶顺序主子式为 Δ_i, $i=1,2,\cdots,n$.

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}1&\frac12&\cdots&\frac12\\\frac12&1&\cdots&\frac12\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac12&\frac12&\cdots&1\end{vmatrix}_{i\times i}=\left(1+\frac{i-1}{2}\right)\left(\frac12\right)^{i-1}=\frac{i+1}{2^i}>0,\ i=1,\cdots,n.$$

$$\therefore \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}=\frac{\frac{i+1}{2^i}}{\frac{i}{2^{i-1}}}=\frac{i+1}{2i}>0,\ i=2,\cdots,n.\quad \frac{\Delta_1}{\Delta_0}=1.$$

由 Jacobi 公式. $A\sim_c \operatorname{diag}\left(1,\frac34,\cdots,\frac{i+1}{2i},\cdots,\frac{n+1}{2n}\right)\sim_c E_n$.

$\therefore q_n$ 签名是 $(n,0)$. 规范型为 $q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2i} y_i^2$

或规范型为 $q_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

Note: ① $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

② Jacobi 公式: $A \in SM_n(F)$. $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 第 i 阶顺序主子式.

若 Δ_i 非零, $i=1,\cdots,n$. 则 $A \sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$

3. 证: $\because \exists \vec{u}, \vec{v} \in V$ s.t. $q(\vec{u}) > 0$. $q(\vec{v}) < 0$. $\therefore q$ 是不定的.

由惯性定理, $\exists V$ 的一组基 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ s.t. $\forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, 有

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \quad . \quad k>0, l>0.$$

令 $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_{k+1}$, 则 $\vec{w} \neq \vec{0}$ 且 $q(\vec{w}) = 1-1 = 0$. 设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

法一: ① $\alpha > 0$. 令 $\vec{z} = \sqrt{\alpha}\,\vec{e}_1$, $q(\vec{z}) = (\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

② $\alpha < 0$. 令 $\vec{z} = \sqrt{-\alpha}\,\vec{e}_{k+1}$, $q(\vec{z}) = -(\sqrt{-\alpha})^2 = \alpha$.

法二: 令 $\vec{z} = \frac{\alpha+1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\alpha-1}{2}\vec{e}_{k+1}$. 则 $q(\vec{z}) = \frac{(\alpha+1)^2}{4} - \frac{(\alpha-1)^2}{4} = \alpha$.

$\therefore q$ 是满射.

4. 证: ① 先证 $m \in \mathbb{N}$ 时, A^m 正定. $m=0,1$ 时显然成立.

法一: (归纳)设 $m>1$ 且 $m-1$ 时结论成立. $\because A$ 正定. $\therefore \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = P^tP$

$$\Rightarrow A^m = \underbrace{(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)}_{m} = P^t\underbrace{(PP^t)\cdots(PP^t)}_{m-1}P = P^tB^{m-1}P.$$

其中 $B = PP^t$. $\therefore B$ 正定. 由归纳假设 B^{m-1} 正定.

$\because A^m \sim_c B^{m-1}$, $\therefore A^m$ 正定.

法二：若 $m=2k$，$k\in\mathbb{Z}^+$．$A^m=A^k\cdot A^k$．

$\because (A^k)^t=(\underbrace{A\cdots A}_{k})^t=\underbrace{A^t\cdots\cdots A^t}_{k}=(A^t)^k=A^k \Rightarrow A^k\in SM_n(\mathbb{R})$．

且 $|A^k|=|A|^k\neq 0$ $\therefore A^k\in GL_n(\mathbb{R})$．

因此．$A^m=(A^k)^t\cdot A^k$ $\therefore A^m$ 正定．

若 $m=2k+1$，$k\in\mathbb{Z}^+$．$A^m=A^k\cdot A\cdot A^k=(A^k)^t\cdot P^t\cdot P\cdot A^k$

$=(PA^k)^t(PA^k)$

其中 $A=P^tP$．$P\in GL_n(\mathbb{R})$ 且 $|PA^k|=|P|\cdot|A|^k\neq 0$．$\therefore PA^k\in GL_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A^m$ 正定．

② $m<0$：$\because A$ 正定 $\therefore A^{-1}$ 正定．由①结论可知．当 $m\in\mathbb{N}$ 时．A^{-m} 也正定

综上，$\forall m\in\mathbb{Z}$，A^m 正定．

5. 证："$\Leftarrow$" 显然成立．

"$\Rightarrow$"（归纳法）．对 n 归纳．$n=1$ 时，结论成立．设 $n>1$ 且结论对 $n-1$ 阶正定矩阵成立．设 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{x} \\ \vec{x}^t & a \end{pmatrix}$，其中 $A_{n-1}\in SM_{n-1}(\mathbb{R})$，$\vec{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$．$a\in\mathbb{R}$

则 A_{n-1} 正定且 $a>0$．（A 正定 $\Leftrightarrow$ A 顺序主子式 >0 $\Leftrightarrow$ A 主子式 >0）

由分块行列相伴消元法可知．

$$|A|=|A_{n-1}|(a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x})$$

$\because |A|>0$．$|A_{n-1}|>0$．$\therefore a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}>0$．又 $\because A_{n-1}^{-1}$ 正定 $\therefore \vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}\geq 0$．

$\Rightarrow 0<a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}\leq a$

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a=a_{nn}$．$\because |A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}=|A_{n-1}|\cdot\underbrace{(a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x})}_{\leq a}$

$\therefore |A_{n-1}|\geq a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$．

$\because A_{n-1}$ 正定 $\therefore |A_{n-1}|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$ $\Rightarrow |A_{n-1}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$．

$\Rightarrow \vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}=0$．

由归纳假设可知 A_{n-1} 是对角阵.

$\because A_{n-1}^{+}$ 正定 且 $\vec{x}^{t} A_{n-1}^{+} \vec{x} = 0$. $\therefore \vec{x} = \vec{0}$. $\Rightarrow$ A是对角阵.

Note: A是正定矩阵, 则 ① $|A| > 0$, A^{+} 正定, A^{m} 正定. $\forall m \in \mathbb{Z}$.
$A \in SM_n(\mathbb{R})$.
② $|A| \leq$ A对角线上元素之积.