第九次习题课

一、知识点总结

5. 多元多项式环

5.1 多元多项式环

了解环的构造；分布表示及有关未定元的次数。

5.2 齐次多项式

5.3 赋值同态

设 R, S 是两个交换环，$\phi: R \to S$ 是环同态. 对任意的 $s_1, \cdots, s_n \in S$

$\exists$ 唯一的环同态 $\phi_{s_1,\cdots,s_n}: R[x_1,\cdots,x_n] \longrightarrow S$ s.t.

$\phi_{s_1,\cdots,s_n}(x_i) = s_i$. $i=1,2,\cdots,n$ 且 $\phi_{s_1,\cdots,s_n}|_R = \phi$.

5.4 初等对称多项式简介与 Vieta 定理.

Vieta 定理: $\dfrac{a_i}{a_n} = (-1)^{n-i} \varepsilon_{n-i}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

ε_{n-i} 是第 $n-i$ 个 n 元初等对称多项式.

(其中 $\varepsilon_k = \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ $\quad k=1,2,\cdots,n$.

6. 一元多项式的无平方部分.

$$\mathrm{lcm}(m,n) = \frac{mn}{\gcd(m,n)}$$

p 无平方 $\Longleftrightarrow \gcd(p, p') = 1$.

7. 中国剩余定理

了解计算思路

第一章 空间与形式

1. 线性空间

1.1 抽象线性空间

1> 定义：$(V,+,\vec{0})$ 交换群，$(F,+,0,\cdot,1)$ 域

$$F\times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha,\vec{v}) \longmapsto \alpha\vec{v}$$

满足以下 a. 结合律 $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$

b. 单位元 $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

c. 分配律 $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$

$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

称 $(V,+,\vec{0}$, 数乘, $1)$ 是域上线性空间。

常见线性空间：坐标空间；矩阵空间；代数空间；映射空间。

会验证线性空间。

2> 计算性质

$\lambda\vec{0}=\vec{0}$；$\lambda\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\lambda=0$ or $\vec{v}=\vec{0}$；$(-1)\vec{v}=-\vec{v}$。

1.2 子空间

1> 定义：$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W$ （其中 $\alpha,\beta\in F$, $\vec{x},\vec{y}\in W$）。

常见线性子空间：映射的核、像分别是定义域、值域子空间；

对称、斜对称是矩阵空间子空间。

会验证子空间。

1.3 子空间的直和

1> 定义：分解唯一

2> 等价条件
$$\begin{cases} a.\ W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k \\ b.\ 零分解唯一 \\ c.\ V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=\{\vec{0}\} \end{cases}$$

验证直和

1.4 线性相关性

1. 线性相(无)关集的定义:

   a. 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关

   b. 整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.

2. 判断线性相(无)关集 $\left\{ \begin{array}{l} \text{赋值法} \\ \text{微分法} \\ \text{多项式法.} \end{array} \right.$

1.5 子空间生成元

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}^+,\ \alpha_i \in F,\ \vec{v_i} \in S \right\}.$$

2. 线性映射

2.1 定义与例子

1. 定义: $\phi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha\phi(\vec{u}) + \beta\phi(\vec{v})$.

2. 结论: ϕ 单射 $\Longleftrightarrow \ker(\phi) = \{\vec{0}_V\}$

常见线性映射: 零映射; 恒同映射; 嵌入映射; 限制映射.

2.2 线性映射的运算

1. $Hom(V,W)$ 是 $Map(V,W)$ 的子空间.
2. $\phi \in Hom(V,W)$ 是双射, 则 $\phi^{-1} \in Hom(W,V)$.
3. $\exists$ 双射 $\phi \in Hom(V,W)$, 则称 V 和 W 线性同构.
4. $Hom(F^n, F^m)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构.
5. $A_{m\times n}$ 与 $F^{m\times n}$

3. 商空间

3.1 商空间

定义: V/U or $V/\sim_U$ 所有方向为 U 的线性流形的集合。

3.2 自然的线性映射

1. $\pi_U: V \longrightarrow V/U$ 是自然投射，即对 $\forall \vec{x} \in V$，$\pi_U(\vec{x}) = \vec{x} + U$.

2. 线性映射基本定理 I：设 $\phi: V \to W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的映射.
   则 $\exists$ 唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ s.t. $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$.
   特别地：$V/\ker(\phi) \cong \mathrm{im}(\phi)$.

3. 若 ϕ 满：$V/\ker(\phi) \cong W$.

4. $V_2/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_1$

$$\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1 + V_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1 + V_2)/V_1
\end{tikzcd}$$

且 $\ker(\psi) = V_1 \cap V_2$.

特别：$V_1 + V_2$ 是直和　$V_2 \cong (V_1 + V_2)/V_1$

4. 基底与维数

4.1 极大线性无关组

1. 定义
2. 线性无关集
   a. 可扩充　($T \subset S$. $\exists M \supset T$.
   b. 等势　(M, N 是 S 中两个极大线性无关集. $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$)
   c. 表示唯一 ($\vec{v} = a_1\vec{w}_1 + \cdots + a_s\vec{w}_s$

4.2 基底与维数

1. card 与 $\dim_F V$.
2. 坐标

常见：坐标空间标准基；矩阵空间标准基

代数

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$；$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

3. 基扩充定理:

!: V是有限维线性空间

4. 线性映射基本定理Ⅱ: 设V的一组基是 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$，W是F上的线性空间

且 $\vec{w_1},\cdots,\vec{w_n}\in W$. 则∃!线性映射 $\varphi: V\to W$ s.t.

$\varphi(\vec{v_1})=\vec{w_1},\cdots,\varphi(\vec{v_n})=\vec{w_n}$.

4.3 若干维数公式

1. $\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$

2. $U\subset V \quad \dim(U)<\dim(V)$

3. $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$.

4. $\dim(\ker(\varphi))+\dim(\mathrm{im}(\varphi))=\dim(V)$.

5. $\dim(V_1+\cdots+V_k)\leq\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$

   等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和。

4.4 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式.

Step 1: 把矩阵 → 坐标空间的线性映射

Step 2: 用 $\dim(\ker(\varphi_A))+\mathrm{rank}(A)=n$. 秩 → 核的维数

Step 3: 利用核空间包含关系和线性映射基本定理Ⅰ. 构造线性单射.

Step 4: 单射保持原像空间的维数证明不等式。

5. 坐标变换和线性映射的矩阵表示.

5.1 坐标变换:

1. $(\vec{e_1'},\cdots,\vec{e_n'})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\underset{\sim}{P} \qquad P\in GL_n(F)$.

   P是从 $(\vec{e_1},\cdots\vec{e_n})$ 到 $(\vec{e_1'},\cdots.\vec{e_n'})$.

   $(x_1',\cdots x_n')^t=P^{-1}(x_1,\cdots x_n)$

5.2 线性映射的矩阵表示

1. $\varphi \in Hom(V, W)$，$\exists!\ A \in F^{m\times n}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \overset{\text{不}}{n\text{维}}\quad \overset{\text{不}}{m\text{维}}$ $(\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_m})$为一组基.

$(\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n})$为一组基.

若 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$，$\varphi(\vec{x})$在$\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_m}$下坐标

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

6. 对偶空间

$Hom(V, F)$ 称为V的对偶空间，记为V^*.

6.1 对偶基

一个子空间既可以通过它的一组生成元张成又可以看成某个齐次线性方程组的解。

对偶定理：像空间(矩阵列生成的空间)的维数 $\Longrightarrow$

核空间(矩阵对应的齐线性方程组的解空间)的维数.

1. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

2. $\varphi: V \longrightarrow V^{**}$ 其中 $\varepsilon_{\vec{v}}: V^* \longrightarrow F$

$\quad\ \vec{v} \longmapsto \varepsilon_{\vec{v}}$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad f \longmapsto f(\vec{v})$.

线性同构.

3. a. $U = \langle \vec{u_1}, \cdots, \vec{u_r} \rangle$和 $W = \langle \vec{w_1}, \cdots \vec{w_m} \rangle$是$F^n$的两个子空间，同时分别是$A \in F^{l\times n}$和$B \in F^{s\times n}$为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间;

b. $U+W$的一组生成元：$\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots \vec{u_r}$；$\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}$；构造C麻烦；

c. 构造$U\cap W$生成元较麻烦，$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间等于$U\cap W$.

6.2 应用.

1. $$M\begin{pmatrix} f_1, \cdots f_k \\ \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_l \end{pmatrix} = (f_i(\vec{v}_j))_{k\times l}.$$

若 $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_l\vec{v}_l$

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{v}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{v}) \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} f_1, \cdots, f_k \\ \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_l \end{pmatrix}$$

2. 等价关系 $\begin{cases} \text{a. } \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_l \text{ 线性相关} \\ \text{b. } \forall k \in \mathbb{Z}^+, f_1, \cdots f_k \in V^*, \\ \quad \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} f_1, \cdots, f_k \\ \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l \end{pmatrix}\right) < l; \\ \text{c. } g_1, \cdots g_n \text{是} V^* \text{的一组基}, \\ \quad \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, \cdots, g_n \\ \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l \end{pmatrix}\right) < l. \end{cases}$

3. $$\dim\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \rangle = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, \cdots, g_n \\ \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l \end{pmatrix}\right)$$

7. 双线性型.

7.1 定义和矩阵表示.

1. 定义 (会验证).

2. $$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

事实上: $A = (f(e_i, e_j))_{n\times n}$.

3. $(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)P$. $\quad P \in GL_n(F)$.

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (u_1, u_2, \cdots u_n) \underbrace{P^t A P}_{B} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$B \sim_c A.$$

4. $rank(f)=rank(A)$

5. 对称与斜对称

$$\mathcal{L}_2(V)=\mathcal{L}_2^+(V)\oplus\mathcal{L}_2^-(V).$$ 对称化对角 $\left\{\begin{array}{l}\text{行列相伴}\\ \text{降维}\end{array}\right.$

6. $A\in SM_n(F)$. $A\sim_c diag\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$

8. 二次型.

8.1 从双线性型到二次型.

1. 定义 (验证二次型)

2. 二次型与配方法

3. $q(\vec{x})=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

4. 规范基与规范型.

$$q(\vec{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$$

$$\vec{x}=x_1\vec{\varepsilon_1}+\cdots+x_n\vec{\varepsilon_n}\in V.$$

特别 $rank(q)=r$.

$$q(\vec{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$$

8.2 利用配方法化规范型.

1. $(A\mid E)\to\cdots\to(B\mid P^t)$ $P=(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$

$B=Q^tAQ$ $Q=(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3})$

2. $Q(V)\cong\mathcal{L}_2^+(V)\cong SM_n(F)$

9. 实二次型.

9.1 惯性定理

1. $\begin{pmatrix}E_k&&\\&-E_l&\\&&0\end{pmatrix}$. 签名 (k,l).

9.2 (半)正定二次型.

1. $q(x)\geq 0$ 半正定 $(k, 0)$ $x_1^2+\cdots+x_k^2$

$q(x)>0$ 正定 $(n, 0)$ $x_1^2+\cdots+x_n^2$

$q(x)\leq 0$ 半负定 $(0, l)$ $-x_1^2-\cdots-x_l^2$

$q(x)<0$ 负定 $(0, n)$ $-x_1^2-\cdots-x_l^2-x_n^2$

不定. (k, l) $x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2\cdots-x_{k+l}^2$

2. 矩阵同理:

判断正负定可从二次型判断也可从签名.

P, q(半)正定, $P+q$(半)正定; 矩阵同理.

9.3 (半)正定等价条件.

$\vec{x}^t\vec{x}\geq 0$; $\vec{x}^t\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

1. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $A^tA\in SM_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\mathrm{rank}(A^tA)=\mathrm{rank}(A)$.

2. A(半)正定 $\Longleftrightarrow \exists B\in(M_n(\mathbb{R}))\ \cancel{P}GL_n(\mathbb{R})$ s.t $A=B^tB$.

3. $\begin{cases}\text{a. 正定} \\ \text{b.} \\ \text{c.}\end{cases}$

4. 半正定, 负定等价条件.

5. A正定 $\Longleftrightarrow (-A)$负定 (补充证明).

二. 补充

矩阵关系:

A与B等价: $\exists P, Q\in GL_n(F)$ s.t $B=PAQ$.

A与B合同: $\exists P\in GL_n(F)$ s.t $B=P^tAP$.

A与B相似: $\exists P\in GL_n(F)$ s.t $B=P^{-1}AP$.

eg. 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$.

(i) 证明：对任意 $\lambda \in F$，$(\lambda E + A) \sim_s (\lambda E + B)$；

(ii) 再设 A 可逆. 证明：B 可逆且 $A^{-1} \sim_s B^{-1}$.

证：设 $B = P^{-1}AP$，其中 $P \in GL_n(F)$.

(i) 计算 $P^{-1}(\lambda E + A)P = P^{-1}\lambda E P + P^{-1}AP = \lambda E + B$.

于是 $(\lambda E + A) \sim_s (\lambda E + B)$.

(ii) 因为秩是相似不变量，所以 B 可逆. 我们有 $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

于是 $B^{-1} \sim_s A^{-1}$.