第九次作业

1. 解：(1) $tr\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right)=3$， $tr\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\right)=4$。

迹不相等故不相似。

(2) $tr\left(\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&0\\3&0&0\end{pmatrix}\right)=1$， $tr\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&3&1\end{pmatrix}\right)=2$。

迹不相等故不相似。

Note：相似不变量：秩，行列式，迹，极小多项式，特征多项式，特征根

2. $J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}_{2\times2}$，$A=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&0\end{pmatrix}_{4\times4}$，$B=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&E_2\end{pmatrix}_{4\times4}$，$C=\begin{pmatrix}J_2&0\\0&\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{4\times4}$

解：计算得：$\mu_{J_2}=t^2$，$\mu_O=t$，$\mu_E=t-1$，$\mu_M=(t-2)t$，其中 $M=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$。

于是，$\mu_A=lcm(\mu_{J_2},\mu_O)=lcm(t^2,t)=t^2$

$\mu_B=lcm(\mu_{J_2},\mu_E)=lcm(t^2,t-1)=t^2(t-1)$

$\mu_C=lcm(\mu_{J_2},\mu_M)=lcm(t^2,t(t-2))=t^2(t-2)$。

3. $f(t)=-t^3+4t+1$，$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$，求 μ_A，$f(A)$。

解：法一：∵ A 不是数乘矩阵，∴ $deg(\mu_A)>1$。

若 $deg(\mu_A)=2$，设 $\mu_A(t)=t^2+at+b$，则 $A^2+aA+bE_2=0$。

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&2a\\a&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}3+a+b=0\\a+2a=0\\1+a+0=0\\2+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}$$

∴ $\mu_A=t^2-t-2$

法二：(利用特征多项式) 已知 $\mu_A \mid \chi_A$，χ_A 是 A 的特征多项式

$\chi_A = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$.

由于 $A-2E \neq 0$ 且 $A+E \neq 0$，故 $\mu_A = \chi_A = \lambda^2 - \lambda - 2$.

$f(A) = -A^3 + 4A + E = -\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. 设：$A \in M_n(F)$，$char(F) \neq 2$，且 $A^2 = 2A + 3E$。证：$rank(A+E) + rank(A-3E) = n$

证：设 $f(t) = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1) \in F[t]$，则 $f(A) = 0$.

设 $p(t) = t-3$，$q(t) = t+1$. $\because char(F) \neq 2$ $\therefore gcd(p, q) = 1$.

设 V 是 F 上 n 维线性空间且 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组基. $\forall \vec{x} \in V$, $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$.

令 $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$，$A$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵.

$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$.

$\because \mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$ 代数同构. $\therefore f(A) = 0 \Rightarrow f(\mathcal{A}) = 0$.

由核核分解知. $V = ker(\mathcal{A}+\mathcal{E}) \oplus ker(\mathcal{A}-3\mathcal{E})$

$\Rightarrow n = dim V = dim(ker(\mathcal{A}+\mathcal{E})) + dim(ker(\mathcal{A}-3\mathcal{E}))$

(对偶定理) $\Rightarrow n = n - rank(\mathcal{A}+\mathcal{E}) + n - rank(\mathcal{A}-3\mathcal{E})$

$\Rightarrow n = rank(\mathcal{A}+\mathcal{E}) + rank(\mathcal{A}-3\mathcal{E}) = rank(A+E) + rank(A-3E)$.

其中 $\mathcal{A}+\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{A}-3\mathcal{E}$ 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵分别为 $A+E$, $A-3E$.

Note:

(1) 核核分解：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$p, q \in F[t]$ 互素. 如果 $(pq)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$，则

$$V = ker(p(\mathcal{A})) \oplus ker(q(\mathcal{A}))$$

(2). $\forall p \in F[t]$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 V 的某组基下矩阵是 A，则 $p(\mathcal{A})$ 在该组基下矩阵是 $p(A)$

(3) 若 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 则 $\mu_A = lcm(\mu_B, \mu_C)$；若 $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$，则 $\mu_B | \mu_A$, $\mu_C | \mu_A$
$\Rightarrow lcm(\mu_B, \mu_C) | \mu_A$

(4) $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $deg(\mu_{\mathcal{A}}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}$ 是数乘算子；$\mu_{\mathcal{A}}$ 是 t 的幂次 $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ 是 ~~A是~~ 幂零算子.