第十次习题课

一、作业

1. (i) 注意 $\dim(V)=3$, $\dim(W)=2$ ∴矩阵 $A^{2\times 3}$

$$(\phi(\vec{e_1}),\phi(\vec{e_2}),\phi(\vec{e_3}))=(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2})\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

(ii) $\operatorname{rank}(\phi)=\operatorname{rank}(A)=2$.

考虑以A为系数矩阵的齐次线性方程组 $A\vec{x}=0$.

$$\dim(\underbrace{\operatorname{sol}(A\vec{x}=\vec{0})}_{\ker(\phi)})+\operatorname{rank}(A)=3.$$

$\Longrightarrow \dim(\ker(\phi))=1$. 解空间维数为1. 基底为 $(3,1,2)^t$

$\Longrightarrow \ker(\phi)$ 的一组基 $3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}$.

(iii).

$$(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}}_{P}$$

$$(\vec{w_1},\vec{w_2})=(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2})\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}}_{Q}$$

P, Q都可逆. 所以 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$; $\vec{w_1},\vec{w_2}$ 分别是V, W的一组基.

ϕ在 $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$; $\vec{w_1},\vec{w_2}$ 下的矩阵是.

$$Q^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&\frac{3}{2}&1\\-1&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$(\phi(\vec{v_1}),\phi(\vec{v_2}),\phi(\vec{v_3}))=(\phi(\vec{e_1}),\phi(\vec{e_2}),\phi(\vec{e_3}))\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=(\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2})AP=Q^{-1}AP$$

2. 解: 由 $g_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$

$= \vec{x}^t A \vec{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

记 $\Delta_0 = 1$, A的第i阶顺序主子式为 Δ_i.

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Jacobi公式: $A \in SM_n(F)$. $\Delta_0 = 1$ Δ_i是A的i阶顺序主子式

若 Δ_i 非零. 则 $A \sim_c diag(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}})$.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{i\times i} = (1+\frac{i-1}{2})(\frac{1}{2})^{i-1} > 0 \quad i=1,\cdots,n$$

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = \frac{(1+\frac{i-1}{2})(\frac{1}{2})^{i-1}}{(1+\frac{i-2}{2})(\frac{1}{2})^{i-2}} = \frac{i+1}{2i} \quad i=2,\cdots,n.$$

由 Jacobi公式. $A \sim_c diag(1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \cdots, \frac{n+1}{2n})$

规范型: $g_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2i} y_i^2$ 签名$(n,0)$.

3. 证：由题 $q(\vec{u})>0$ 和 $q(\vec{v})<0$，所以 $q(\vec{u})$ 既不是半正定也不是半负定的.

由惯性定理，存在 V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ s.t $\forall \vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$,

我们有 $q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$.

其中 $k>0$ 且 $l>0$.

令 $\vec{w}=\vec{e_1}+\vec{e}_{k+1}$. 则 $\vec{w}\neq\vec{0}$ 且 $q(\vec{w})=1-1=0$. 设 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

令 $\vec{z}=\dfrac{\alpha+1}{2}\vec{e_1}+\dfrac{\alpha-1}{2}\vec{e}_{k+1}$

则 $q(\vec{z})=\dfrac{(\alpha+1)^2}{4}-\dfrac{(\alpha-1)^2}{4}=\alpha$. 即 q 是满射.

或：$q: V\to\mathbb{R}$，$0<q(\vec{u})\in im(q)$，$\Longrightarrow dim(im(q))>0$.

又 $im(q)\subset\mathbb{R}$，$1\leq dim(im(q))\leq dim$

4. 证：当 $m\in\mathbb{N}$ 时，A^m 正定. 当 $m=0,1$ 时成立.

$m>1$ 且 $m-1$ 时结论成立.

因为 A 正定，所以 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t $A=P^tP$. 于是，

$A^m=(P^tP)(P^tP)\cdots(P^tP)(P^tP)=P^t(PP^t)\cdots(PP^t)P=P^tB^{m-1}P$.

其中 $B=PP^t$. 再由定理可知，B 正定. 于是 B^{m-1} 正定。

因为 $A^m\sim_c B^{m-1}$，所以 A^m 正定. $\square$

因为 A 正定，所以 A^{-1} 正定. 当 $m\in\mathbb{N}$ 时. A^{-m} 也正定.

5. 证：只需证明 $det(A)$ 等于 A 的对角线上元素之积蕴含 A 是对角矩阵.

对 n 归纳. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设 $n>1$ 且结论对 $n-1$ 阶正定矩阵成立. 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{x} \\ \vec{x}^t & a \end{pmatrix}$$

其中 $A_{n-1}\in SM_{n-1}(\mathbb{R})$，$\vec{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$，$a\in\mathbb{R}$. 则 A_{n-1} 正定且 $a>0$.

由分块行列相伴消元法可知.

$$det(A)=det(A_{n-1})(a-\vec{x}^tA_{n-1}^{-1}\vec{x}).$$

因为$\det(A)>0$和$\det(A_{n-1})>0$，所以$a-\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x}>0$. 又因为$A_{n-1}^{-1}$正定.
所以$\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x}\geq 0$. 由此得出$0<a-\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x}\leq a$.

因为$\det(A)$等于其对角线元素之积且$0<a-\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x}\leq a$，所以
$\det(A_{n-1})$不小于A_{n-1}的对角线元素之积. 我们有$\det(A_{n-1})$不大于A_{n-1}的对角线元素之积. 于是，$\det(A_{n-1})$等于A_{n-1}的对角线元素之积. 由归纳假设A_{n-1}是对角矩阵. 进而，$\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x}=0$. 因为$A_{n-1}^{-1}$正定，
所以$\vec{x}=\vec{0}_{n-1}$. 由此得出A是对角矩阵.

"$\Leftarrow$" 显然.

"$\Rightarrow$" $\det(A)=a_{11}\cdots a_{nn} = \det(A_{n-1})(a_{nn}-\vec{x}^t A_{n-1}^{-1}\vec{x})$

$\leq \det(A_{n-1})a_{nn}$

$\det(A_{n-1})\geq a_{11}\cdots a_{n-1\,n-1}$ $\quad \det(A_{n-1})\leq$

课程内容回顾.

1. 不同基底下线性映射的矩阵表示

1.1 线性映射下的矩阵

1. $\phi((\vec{v_1},\cdots\vec{v_k})M)=(\phi(\vec{v_1}),\cdots,\phi(\vec{v_k}))M$.

2. $\phi \longleftrightarrow A$ 唯一性.

3. 互: $Hom(V,W)\longrightarrow F^{m\times n}$ 线性同构.

   $\phi \longmapsto A$.

1.2 不同基底

1. $Q^{-1}AP$.

2. $rank(A)=rank(\phi)$.

3. 若 $rank(\phi)=r$. 则∃V的一组基和W的一组基 s.t.

   ϕ在该基下的矩阵是 $M=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$ $r=dim(im(\phi))$.

$dim(ker(\phi))+rank(\phi)=dim(V)$.

ϕ单 $ker(\phi)=\{0\}$. ϕ满 $dim(W)$ ϕ双射 $dim(V)=dim(W)$.

$A \xleftrightarrow{对应} A^t$. (对偶情况下).

2. 线性算子代数和矩阵相似

2.1 线性算子代数

1. 互: $\mathcal{L}(V)\longrightarrow M_n(F)$

   $\mathcal{A}\longmapsto A$ $\mathcal{A}$在$(\vec{e_1},\cdots\vec{e_n})$下的矩阵.

互既是线性同构又是环同构 (代数同构).

2.2 矩阵的相似

1. $(\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$ $P^{-1}AP$

2. 相似定义及等价条件.

3. 单个算子生成的子环

核核分解.

核像分解.

4. 算子和矩阵的极小多项式

1. 定义

2. 存在且唯一, 次数不大于 n^2

3. 数乘算子和幂零算子

eg. 设 $A \in M_n(F)$ 且对任意 $P \in GL_n(F)$. $PA = AP$. 证明: A 是数乘矩阵.

证: 设 $A=(a_{ij})$ 和 $L_{ij}(1)$ 是第二类初等矩阵, $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$, $i \neq j$.

由 $L_{ij}(1)A = AL_{ij}(1)$

左: 第 i 行 i 列处元素 $a_{ii}+a_{ji}$ = 右: 第 i 行 i 列处元素 a_{ii}

$\Longrightarrow a_{ji}=0$. $\Longrightarrow$ A 对角阵.

设 L_{ij} 是第一类初等矩阵. 由 $L_{ij}A = AL_{ij}$ 可知 $a_{ii}=a_{jj}$ $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

即 A 是数乘矩阵.

推广: 设 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V)$. 如对任意的可逆线性算子 $f \in \mathscr{L}(V)$, $f\mathscr{A} = \mathscr{A}f$, 则 $\mathscr{A}$ 是数乘算子.

回忆: 如果对任意 $\vec{v} \in V$, 存在 $\lambda_{\vec{v}} \in F$ s.t. $\mathscr{A}(\vec{v}) = \lambda_{\vec{v}} \cdot \vec{v}$, 则 $\mathscr{A}$ 是数乘算子.

假设 $\mathscr{A}$ 不是数乘算子, 则存在 $\vec{u}, \vec{v} \in V$ 线性无关 s.t $\mathscr{A}(\vec{u}) = \vec{v}$. 令 $\vec{e_1} = \vec{u}$, $\vec{e_2} = \vec{v}$.

则 $\mathscr{A}(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$. 由 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 扩充为 V 的一组基 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \cdots \vec{e_n}$. 设 $\vec{w} = \mathscr{A}(\vec{e_2})$.

Case 1. $\vec{w} \neq \vec{e_1}$. 令 f 是可逆 $\begin{cases} f(\vec{e_1}) = \vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} \end{cases}$ 则 $\mathscr{A}f(\vec{e_1}) = \mathscr{A}(\vec{e_2}) = \vec{w}$. 矛盾.

$f\mathscr{A}(\vec{e_1}) = f(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$

Case 2. $\vec{w} = \vec{e_1}$. 因为 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 线性无关, 所以 $\vec{e_1}, \vec{e_1}+\vec{e_2}$ 线性无关. 于是 $\exists$ 可逆线性算子 f s.t $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}+\vec{e_2}$, $f(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$.

$\mathscr{A}f(\vec{e_1}) = \mathscr{A}(\vec{e_1}+\vec{e_2}) = \vec{e_2}+\vec{e_1}$ 而 $f\mathscr{A}(\vec{e_1}) = f(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$. 矛盾. □

注: 如果一个线性算子在任何基底下的矩阵不变, 则该算子必然是数乘算子.