期中考试卷.

1. (i) $A\vec{x}=0$ $\quad B\vec{x}=0.$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$V_A \qquad V_B.$$

则 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\vec{x}=0$ 对应解空间 $V_A\cap V_B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1+x_4=0 \\ -x_2+x_3=0 \\ x_2+x_4=0. \end{cases}$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}+\dim(V_A\cap V_B)=4 \qquad \dim(V_A\cap V_B)=1$$

(ii). $(1, 1, 1, -1)^t$

(iii) $\dim(V_A+V_B)=\dim(V_A)+\dim(V_B)-\dim(V_A\cap V_B)=3$

2. (i)

$$(\phi(\vec{e_1}), \phi(\vec{e_2}), \phi(\vec{e_3}))=(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\phi)=\mathrm{rank}(A)$

(ii). $\mathrm{rank}(B)=2 \in GL_2$

(iii) $(\phi(\vec{e_1}), \phi(\vec{e_2}), \phi(\vec{e_3}))=(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$=(\vec{V_1}, \vec{V_2})C$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=B^{-1}A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (i).

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(ii) $(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&-3&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-4&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\underbrace{}_{P^t}$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

签名(2, 1)

4. (i). $\begin{cases}a>0\\(a+1)(a-1)>0\\(a+1)(a-1)^2>0\end{cases}\Longrightarrow\quad a>1.$

(ii) $\begin{cases}a<0\\(a+1)(a-1)<0\\(a+1)(a-1)^2<0\end{cases}\Longrightarrow\quad a<-1$

(iii) $(a+1)(a-1)^2\neq 0.$ $a\in(-1,1).$

5. (i) 基底中元素为非零向量.

(ii). $V_1, V_2, \cdots V_k$ 分别对应的基为

$B_1, B_2, \cdots B_k.$

则 $V_1+V_2+\cdots+V_k \triangleq U$ U是由$\langle \underbrace{B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k}_{=B}\rangle$生成的

记B中极大线性无关元个数为 d $\quad d=\dim(U)\leq \mathrm{card}(B).$

又 $\dim(U)=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k)$

$=\mathrm{card}(B_1)+\mathrm{card}(B_2)+\cdots+\mathrm{card}(B_k)\geq \mathrm{card}(B).$

$(\because B=B_1\cup\cdots\cup B_k).$

$d=\mathrm{card}(B).$

即B本身是线性无关的，由此得出B是U的一组基。

6. 考虑线性映射: $\phi: V \longrightarrow V$

$p \longmapsto \mathrm{rem}(p, l)$. $d \le m+n$.

(i) $U = \ker(\phi)$ 子空间. $\phi(l) = 0$. $\therefore l \in U$.

(ii) $\mathrm{im}(\phi) = F[x]^{(d)}$ $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = d$.

$\dim(U) = \dim(V) - d = m+n+1-d$.

$\begin{cases} f \mid a \\ g \mid a \end{cases}$ $\begin{cases} f \mid b \\ g \mid b \end{cases}$

常规做法: (i) 设 $a, b \in U$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha a + \beta b \in U$.

$f \mid \alpha a + \beta b$ $g \mid \alpha a + \beta b$ U子空间

$d \le m+n$ $l \in U$.

(ii). 注意到 $l, xl, \cdots, x^{m+n-d} l \in U$. 线性无关.

设 $h \in U$. h是l倍式 $\exists\, g \in F[x]$ s.t $h = gl$. $\because \deg(h) \le m+n$,

$\therefore \deg(g) \le m+n-d$.

令 $g = g_{m+n-d} x^{m+n-d} + \cdots + g_1 x + g_0$ $g_i \in F$

$h = g_{m+n-d}(x^{m+n-d} l) + \cdots + g_1(xl) + g_0 l$ U的基底

$\dim(U) = m+n-d+1$

7. 证 (i) 定义证. or 设 $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x})g(\vec{y}) + f(\vec{y})g(\vec{x}))$.

则ϕ是对称双线性型, 注意到 $\phi(\vec{x}, \vec{x}) = q(\vec{x})$.

故q是二次型.

$\begin{cases} q(\vec{x}) = q(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}). \end{cases}$

(ii). 设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是V的一组基, $\alpha_i = f(\vec{e}_i)$, $\beta_j = g(\vec{e}_j)$, $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

则q在该基底下的矩阵是

$$A = (\phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{n\times n} = \left(\frac{\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i}{2}\right)_{n\times n} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1 \cdots \beta_n) + \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)\right)$$

$\mathrm{rank}(A) \le 2$.

如果 $\dim\langle f,g\rangle=1$. 则存在 $\lambda\in F\setminus\{0\}$ s.t $g=\lambda f$, 即 $\beta_j=\lambda\alpha_j$, $j=1,2,\cdots,n$.

于是
$$A=\lambda(\alpha_i\alpha_j)_{n\times n}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).$$

故 $\operatorname{rank}(A)=1$.

如果 $\dim\langle f,g\rangle=2$. 则 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $(\beta_1,\cdots\beta_n)$ 不线性相关。故矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

中有一个二阶子式非零. 不妨设

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}\neq 0.$$

则 A 中的二阶子式
$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{2}\\ \frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{2} & \beta_2\alpha_2\end{pmatrix}\neq 0.$$

于是 $\operatorname{rank}(A)\geqslant 2$ 故 $\operatorname{rank}(A)=2$.

8. (i) 设 $\vec{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量, 则
$$\vec{x}^t(A+B)\vec{x}=\vec{x}^tA\vec{x}+\vec{x}^tB\vec{x}\geqslant 0.$$

故 $A+B$ 是半正定的。

(ii) 设 $A=P^tP$ 和 $B=Q^tQ$, 其中 $P,Q\in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(P)$ 且 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(Q)$. 不妨设 $r=\operatorname{rank}(P)\geqslant\operatorname{rank}(Q)$.

由(i)可知, 存在 $R\in M_n(\mathbb{R})$ s.t $A+B=R^tR$, 且 $S:=\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(R)$

我们只需证 $S\geqslant r$. 为此只要证明 $V_R\subset V_P$. 设 $\vec{v}\in V_R$. 则 $R\vec{v}=\vec{0}$. 故

$$\vec{v}^t(A+B)\vec{v}=0\Longrightarrow\vec{v}^tA\vec{v}+\vec{v}^tB\vec{v}=0\xrightarrow{A,B\text{半正定}}\vec{v}^tA\vec{v}=0\text{ 且 }\vec{v}^tB\vec{v}=0.$$

由此可知, $\vec{v}^tA\vec{v}=0$, 即 $\vec{v}^tP^tP\vec{v}=\vec{0}$. 故 $P\vec{v}=\vec{0}$. 即 $V_R\subset V_P$.

方法二：对$\mathbb{R}^n$上的二次型 $q(\vec{x})=\vec{x}^t M\vec{x}$. 我们记

$$C_M=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid q(\vec{x})=0\}.$$

当 M 半正定时，C_M是子空间（？） eg 9.14 [设 $q\in Q(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的。]

故 C_A, C_B, C_{A+B} 都是子空间.

设二次型 $q_A(\vec{x})=\vec{x}^t A\vec{x}$ 在基底 $\vec{v}_1,\cdots \vec{v}_n$ 下的规范型是

$$q_A(\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_k^2,$$

其中 $\vec{y}=y_1\vec{v}_1+\cdots+y_k\vec{v}_k+y_{k+1}\vec{v}_{k+1}+\cdots+y_n\vec{v}_n$.

则 $C_A=\langle\vec{v}_{k+1},\cdots,\vec{v}_n\rangle$ 特别地，$\dim(C_A)=n-k$. 其中 $k=\operatorname{rank}(A)$.

eg 9.14.

同理 $\dim(C_B)=n-\operatorname{rank}(B)$ 和 $\dim(C_{A+B})=n-\operatorname{rank}(A+B)$.

因为 A 和 B 都是半正定的，所以 $C_{A+B}\subset C_A\cap C_B$. 故

$$n-\operatorname{rank}(A+B)=\dim C_{A+B}\le\min(\dim(C_A),\dim(C_B))$$
$$=n-\max(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)).$$

故 $\operatorname{rank}(A+B)\ge\max(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B))$.

作业题:

1. 根据相似不变量 (i) det (ii) tr 不同，故两矩阵不相似。

2. 首先计算得 $\mu_{J_2}=t^2$，$\mu_0=t$，$\mu_E=t-1$，$\mu_M=(t-2)t$，其中

$$M=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

于是 $\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{J_2},\mu_0)=t^2$

$\mu_B=\mathrm{lcm}(\mu_{J_2},\mu_E)=t^2(t-1)$

$\mu_C=\mathrm{lcm}(\mu_{J_2},\mu_M)=t^2(t-2)$.

3. 解：若 $\deg(\mu_A)=1$，设 $\mu_A=t+a$，则 $A+aE_2=0$.

$$\begin{cases}1+a=0\\2=0\\1=0\\a=0\end{cases}\Longrightarrow \text{无解}\qquad \deg(\mu_A)>1.$$

若 $\deg(\mu_A)=2$ 设 $\mu_A=t^2+at+b$ 则 $A^2+aA+bE_2=0$.

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&2a\\a&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&0\\0&b\end{pmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}3+a+b=0\\2+2a=0\\1+a+0=0\\2+b=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2.\end{cases}\qquad \therefore \mu_A=t^2-t-2.$$

(用特征多项式) $\chi_A=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)-2=\lambda^2-\lambda-2$
$=(\lambda-2)(\lambda+1)$.

则 $\mu_A\mid\chi_A$. 由于 $A-2E\neq0$ 且 $A+E\neq0$. 则 $\mu_A=\chi_A=\lambda^2-\lambda-1$.

$$f(A)=-A^3+4A+E=-\begin{pmatrix}5&6\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&8\\4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

4. 证明：设 $f(t)=t^2-2t-3=(t-3)(t+1)\in F[t]$. 则 $f(A)=0$.

设 $p(t)=t-3$, $g(t)=t+1$. 则 $\gcd(p,g)=1$.

设 V 为 F 上 n 维线性空间 $\quad \mathscr{A}: V \longrightarrow V$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$ 显然为 V 上线性算子. 且 A 为 $\mathscr{A}$ 在标准基下的矩阵.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(V) & \cong & M_n(F). \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{A} & & A. \end{array}$$

由 $f(A)=0$ 知 $f(\mathscr{A})=0$.

$$\ker(\mathscr{A}+\overset{\varepsilon}{\cancel{id}}) \oplus \ker(\mathscr{A}-3\overset{\varepsilon}{\cancel{id}}) = V.$$

$\Rightarrow \dim\ker(\mathscr{A}+\overset{\varepsilon}{\cancel{id}}) + \dim\ker(\mathscr{A}-3\overset{\varepsilon}{\cancel{id}}) = \dim V = n.$

$\Rightarrow \dim V - \operatorname{rank}(\mathscr{A}+id) + \dim V - \operatorname{rank}(\mathscr{A}-3id) = \dim V.$

$\Rightarrow n = \operatorname{rank}(\mathscr{A}+id) + \operatorname{rank}(\mathscr{A}-3id) = \operatorname{rank}(A+E) + \operatorname{rank}(A-3E).$ ▨

注：$\forall p\in F[t]$. $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在某组基下矩阵为 A. 则 $p(\mathscr{A})$ 在该基下矩阵 $p(A)$.

3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{rank}(A)=2 \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$ $\quad A^3=\begin{pmatrix}5&6\\3&2\end{pmatrix}$.

求 A 极小多项式. 设 $\exists a,b,c\in F$ s.t. $aA^2+bA+cE_2=O_2$.

得方程组 $\begin{cases}3a+b+c=0\\2a+2b=0\\a+b=0\\2a+c=0\end{cases} \Longrightarrow$ 特解 $\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=2\end{cases}$ $\mu_A(t)=-t^2+t+2.$

$f(A)=$

4. $f(t)=(t-3)(t+1)$ $\quad f(A)=O_n$.

$0=\operatorname{rank}((A+E)(A-3E)) \geq \operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-3E)-n$

又 $n=\operatorname{rank}((A+E)+(3E-A)) \leq \operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(-(A-3E))$.

$\Rightarrow n\leq \operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-3E)\leq n$. 即 $\operatorname{rank}(A+E)+\operatorname{rank}(A-3E)=n$. □