第十二次习题课

一、作业中的问题及例子补充

1. 1) 记 $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(t)=(t-2)(t+1)$

$t=2$时. $(2E-A)\vec{x}=\vec{0}$ $\quad \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$t=-1$时. $(-E-A)\vec{x}=\vec{0}$ $\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

2) $B=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $\quad \chi_B(t)=t^2-2t\cos\theta+1.$

$(\theta\neq k\pi)$.

$t=\cos\theta+i\sin\theta$ $\quad [(\cos\theta+i\sin\theta)E-B]\vec{x}=\vec{0}$ $\quad \vec{v_1}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

$t=\cos\theta-i\sin\theta$ $\quad [(\cos\theta-i\sin\theta)E-B]\vec{x}=\vec{0}$ $\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$.

$\theta=k\pi$, $\vec{v}$为任意向量。

注：若将数域改为 $\mathbb{R}$. $\theta\in(0,2\pi)$.

上述多项式的判别式为：$4(\cos\theta)^2-4\leq 0$.

a. $\theta\neq\pi$时，A无实特征根，故没有特征向量.

$\theta=\pi$时，$\chi_A(t)=t^2+2t+1$. $\quad spec_{\mathbb{R}}(A)=\{-1\}$.

此时，$A=-E_2$是数乘矩阵. 于是$\mathbb{R}^2$中任何非零向量都是A的关于-1的特征向量。

3) 同上.

注：写出特征多项式

计算特征值

代入方程组求特征值所对应的线性无关的特征向量。

2. 证：设 $\mathrm{rank}(A)=n$. $\exists A^{-1}$ s.t $A^{-1}A=E_n$.

$BA=(A^{-1}A)BA=A^{-1}(AB)A$. $\Longrightarrow AB\sim_s BA$. $\quad\square$

3. $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V)$. 若 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ 则对 $\forall \lambda \in K$. $\ker(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{B}$-子空间.

证: $\forall \vec{x} \in \ker(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})$. 则 $(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})(\vec{x}) = \lambda\vec{x}-\mathscr{A}\vec{x}=\vec{0}$.

且 $(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})(\mathscr{B}\vec{x}) = \lambda\mathscr{B}\vec{x}-\mathscr{A}\mathscr{B}\vec{x} = \lambda\mathscr{B}\vec{x}-\mathscr{B}\mathscr{A}\vec{x} = \mathscr{B}(\lambda\vec{x}-\mathscr{A}\vec{x})=\vec{0}$

∴ $\mathscr{B}\vec{x} \in \ker(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})$.

□

∴ $\ker(\lambda\mathcal{E}-\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{B}$-子空间.

4. 证: 设 $U \subseteq V$ 为 $\mathscr{A}$ 的任意不变子空间. 则 $\mathscr{A}|_U \in \mathcal{L}(U)$.

∵ $\mathscr{A}$ 可逆 ∴ $\ker(\mathscr{A})=\{\vec{0}\} \Rightarrow \ker\mathscr{A}|_U=\{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(\operatorname{im}(\mathscr{A}|_U))=\dim U$

又∵ $\operatorname{im}(\mathscr{A}|_U) \subseteq U$ (U是 $\mathscr{A}$-子空间)

∴ $\operatorname{im}(\mathscr{A}|_U)=U$ ∴ $\mathscr{A}|_U$ 满射. ∴ $\mathscr{A}|_U$ 可逆.

则对 $\forall \vec{u} \in U$, $\exists \vec{v} \in U$ st $\mathscr{A}|_U(\vec{v}) = \mathscr{A}(\vec{v}) = \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \mathscr{A}^{-1}(\vec{u}) \in U$.

∴ U是 $\mathscr{A}^{-1}$-子空间.

设 $\vec{x}$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 则 $\exists \lambda \in F\setminus\{0\}$ $\mathscr{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$.

$\vec{x}=\lambda\mathscr{A}^{-1}\vec{x}$ 即 $\mathscr{A}^{-1}\vec{x}=\frac{1}{\lambda}\vec{x}$.

特别地, $\vec{v}$ 为 $\mathscr{A}$ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ $\langle\vec{v}\rangle$ 为 $\mathscr{A}$-子空间

$\|$

$\vec{v}$ 为 $\mathscr{A}^{-1}$ . . . . $\Longleftrightarrow$ $\langle\vec{v}\rangle$ 为 $\mathscr{A}^{-1}$-子空间.

补充例子(eg1): 设 $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$, $U \subset V$ 是 $\mathscr{A}$-子空间. 证明: 对任意 $f \in F[t]$. U是 $f(\mathscr{A})$ 不变的.

证: 对 $k \in \mathbb{N}$ 归纳. 对任意 $\vec{u} \in U$. $\mathcal{E}(\vec{u})=\vec{u} \in U$. 于是 $k=0$ 时 ✓.

$k>1$ 时且结论对于 $k-1$ 成立. 则 $\mathscr{A}^k(\vec{u})=\mathscr{A}(\mathscr{A}^{k-1}(\vec{u}))$.

∵ $\mathscr{A}^{k-1}(\vec{u}) \in U$. ∴ $\mathscr{A}^k(\vec{u}) \in U$ (∵ U是 $\mathscr{A}$-子空间).

设 $f=f_m t^m+\cdots+f_1 t+f_0$, $f_i \in F$. 则 $f(\mathscr{A})(\vec{u})=f_m\mathscr{A}^m(\vec{u})+\cdots$

$+f_1\mathscr{A}(\vec{u})+f_0(\vec{u})$ 由上述结论 $f(\mathscr{A})(\vec{u}) \in U$.

□

5. $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$，若 $\exists p\in\mathbb{N}$, s.t $\operatorname{Im}\mathscr{A}^p=\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+1}$

证明: $V=\ker(\mathscr{A}^p)\oplus\operatorname{im}(\mathscr{A}^p)$ 是两个 $\mathscr{A}$-子空间的直和。

证: 首先说明 $\ker(\mathscr{A}^p)$ $\operatorname{im}(\mathscr{A}^p)$ 是 $\mathscr{A}$-子空间. $(\forall p\in\mathbb{N})$.

a. $\forall\vec{x}\in\ker\mathscr{A}^p$, 有 $\mathscr{A}^p\vec{x}=\vec{0}$ $\quad\mathscr{A}^p(\mathscr{A}\vec{x})=\mathscr{A}^{p+1}\vec{x}=\mathscr{A}(\mathscr{A}^p\vec{x})=\vec{0}$

$\therefore\ \mathscr{A}\vec{x}\in\ker\mathscr{A}^p$.

$\therefore\ \ker\mathscr{A}^p$ 是 $\mathscr{A}$-子空间.

b. $\forall\vec{x}\in\operatorname{im}\mathscr{A}^p$. $\exists\vec{y}\in V$ s.t $\vec{x}=\mathscr{A}^p\vec{y}$

$\therefore\ \mathscr{A}\vec{x}=\mathscr{A}(\mathscr{A}^p\vec{y})=\mathscr{A}^{p+1}(\vec{y})\in\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+1}=\operatorname{im}\mathscr{A}^p$

$\therefore\ \operatorname{im}\mathscr{A}^p$ 是 $\mathscr{A}$-子空间.

再证: $V=\ker\mathscr{A}^p\oplus\operatorname{im}\mathscr{A}^p$.

断言: $p\in\mathbb{N}$ 若 $\operatorname{im}\mathscr{A}^p=\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+1}$. 则 $q\in\mathbb{N}$. $\operatorname{im}\mathscr{A}^p=\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+q}$.

数学归纳法: $q=1$ ✓.

$q>1$, 假设 $q-1$ 成立 即 $\operatorname{im}\mathscr{A}^p=\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+q-1}$.

$$\Rightarrow\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+q}=\operatorname{im}\mathscr{A}(\mathscr{A}^{p+q-1})=\mathscr{A}\operatorname{im}(\mathscr{A}^{p+q-1})=\mathscr{A}\operatorname{im}\mathscr{A}^p$$

$$=\operatorname{im}(\mathscr{A}\circ\mathscr{A}^p)=\operatorname{im}\mathscr{A}^{p+1}=\operatorname{im}\mathscr{A}^p\ ✓.$$

特别地，令 $p=q$. 则 $\operatorname{im}\mathscr{A}^p=\operatorname{im}\mathscr{A}^{2p}=\operatorname{im}((\mathscr{A}^p)^2)$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(\mathscr{A}^p)=\operatorname{rank}((\mathscr{A}^p)^2)$

核像分解:

$$V=\operatorname{im}\mathscr{A}^p\oplus\ker\mathscr{A}^p.$$

$\boxed{///}$

eg2. 设 $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在基底 $\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n}$ 是

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}.$$

其中 $B \in M_d(F)$, $C \in M_{n-d}(F)$. 证: $U = \langle \vec{e_1}, \cdots \vec{e_d} \rangle$, $W = \langle \vec{e}_{d+1}, \cdots, \vec{e_n} \rangle$ 是 $\mathscr{A}$-子空间, 且 $V = U \oplus W$.

证: 设 $\vec{x} \in U$. 则存在 $x_1, \cdots, x_d \in F$ s.t $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_d\vec{e_d}$.

令 $\vec{x}_d = (x_1, \cdots x_d)^t$ 则 $\mathscr{A}(\vec{x})$ 在该基底下的坐标等于

$$A\begin{pmatrix} \vec{x}_d \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x}_d \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\vec{x}_d \\ C\vec{0}_{n-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\vec{x}_d \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix}.$$

因为后 $(n-d)$ 个坐标都等于零, 所以 $\mathscr{A}(\vec{x}) \in U$, 即 U 是 $\mathscr{A}$-子空间.

类似可证 W.

$\because \dim(U) = d$, $\dim(W) = n-d$, 且 $U + W = V$,

$\therefore \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$. □

$V = U \oplus W$.

eg3. 设 $A \in M_n(F)$. 证明:

(i) $\chi_A(0) \neq 0 \iff A$ 可逆;

(ii) $\chi_A = \chi_{A^t}$.

证: (i) $\chi_A(0) = \det(A)$.

(ii) $\chi_A(t) = |tE - A| = |(tE-A)^t| = |tE - A^t| = \chi_{A^t}(t)$. □

二. 课程内容回顾

5. 不变子空间

1> 定义

2> $\exists V$的一组基 s.t $\mathcal{A}$在该基下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

其中 $B\in M_d(F)$. $\mu_{\mathcal{A}_U}\mid\mu_{\mathcal{A}}$, $\mu_B\mid\mu_{\mathcal{A}}$, $\mu_D\mid\mu_{\mathcal{A}}$.

3>. U_1, U_2 是 $\mathcal{A}$-子空间, U_1+U_2, $U_1\cap U_2$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间.

4>. $V=U_1\oplus U_2$, U_1, U_2是非平凡子空间,

在V的基 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{d_1}, \delta_1,\cdots \delta_{d_2}$ 下 $\mathcal{A}$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

$A_i\in M_{d_i}(F)$. $\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$.

5> 核像分解II: $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

$$V=\ker(\mathcal{A})\oplus \mathrm{im}(\mathcal{A})\Longleftrightarrow t^2\nmid\mu_{\mathcal{A}}.$$

6. 不可分子空间

1> 定义

2> V是有限个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和.

7. 特征向量和特征多项式

1> $\vec{v}$是$\mathcal{A}$的特征向量 $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\vec{v})\in\langle\vec{v}\rangle \Leftrightarrow \exists\lambda\in F$ s.t $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$.

2>. 特征向量, 特征值, 特征子空间

3>. $\det(\lambda E-A)=\chi_A$, $spec_A$.

4> 设V是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则$\mathcal{A}$一定有特征向量.

5>. $\chi_A(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$, $a_i\in F$.

则 $a_{n-1}=-tr(A)$. $a_0=(-1)^n\det(A)$.

特别: A可逆$\Leftrightarrow 0$不是A的特征根.

8. 对角化

1) 可对角化判别方法 Ⅰ. Ⅱ. Ⅲ. Ⅳ. Ⅴ.

2) $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \cdots \lambda_k \in spec_F(\mathscr{A})$两两不同. 则

$V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_k}$ 是直和。

9. 循环子空间

1) 定义:

2) a. $F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$是$\mathscr{A}$不变的.

b. 设 $d = deg(\mu_{\mathscr{A},\vec{v}})$. 则 $\vec{v}$, $\mathscr{A}(\vec{v})$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{d-1}(\vec{v})$是$F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v}$的一组基.

特别地, $d = dim(F[\mathscr{A}]\cdot\vec{v})$.

3) V是$\mathscr{A}$-循环的. 则$\mu_{\mathscr{A}} = \chi_{\mathscr{A}}$.

4) Hamilton - Cayley 设 $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = 0$. $\mu_{\mathscr{A}} | \chi_{\mathscr{A}}$.

eg 4. 设 $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\alpha, \beta \in spec_F(\mathscr{A})$ 且 $\alpha \neq \beta$. 设 $\vec{u} \in V^{\alpha}$, $\vec{v} \in V^{\beta}$ 是两个非零向量. 证明: $\vec{u}+\vec{v}$不是$\mathscr{A}$的特征向量。

证: 假设$\vec{u}+\vec{v}$是$\mathscr{A}$的特征向量. 则$\exists\ \lambda \in F$ s.t $\mathscr{A}(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda(\vec{u}+\vec{v})$.

一方面, $\mathscr{A}(\vec{u}+\vec{v}) = \mathscr{A}(\vec{u}) + \mathscr{A}(\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

于是 $(\lambda-\alpha)\vec{u} + (\lambda-\beta)\vec{v} = \vec{0}$. 因为 $\alpha \neq \beta$, 所以不妨假设 $\lambda - \alpha \neq 0$.

由此得出, $\vec{u} = \xi\vec{v}$, 其中 $\xi = -(\lambda-\beta)(\lambda-\alpha)^{-1}$. 于是 $\vec{u} \in V^{\beta}$. 即

$\mathscr{A}(\vec{u}) = \beta\vec{u}$. 从而我们有 $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$. 因为 $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\therefore$ $\alpha = \beta$. 矛盾.

另证: 假设$\vec{u}+\vec{v}$是$\mathscr{A}$的特征向量. 则$\exists\ \lambda \in F$ s.t $\vec{u}+\vec{v} \in V^{\lambda}$.

若$\lambda = \alpha$, 则 $\vec{u}+\vec{v} \in V^{\alpha}$ $\Rightarrow \vec{v} \in V^{\alpha}$ 矛盾.

同理$\lambda \neq \beta$.

故 $V^{\alpha} + V^{\beta} + V^{\lambda}$是直和 $(V^{\alpha}+V^{\beta}) \cap V^{\lambda} = \{\vec{0}\}$.

$\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$ 故$\vec{u}+\vec{v} \in V^{\alpha}$ 矛盾. $\square$

eg 5. 举例说明特征向量不是相似不变量。

解. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

计算得 $\chi_A = t^2-1$ $\therefore$ $spec_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-1\}$ 于是 $V^1=\langle (1,1)^t \rangle$ 和 $V^{-1}=\langle (1,-1)^t \rangle$.

设 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

而 $B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

A 的特征向量 $(1,1)^t$ 不是 B 的特征向量.

eg 6. 设 $A,B\in M_n(F)$ 相似, $\lambda \in spec_F(A)$. 则 $\lambda \in spec_F(B)$ 且 $\dim V_A^\lambda = \dim V_B^\lambda$, 其中 V_A^λ 和 V_B^λ 代表 A,B 关于 λ 的特征子空间。

证明: 设 $P\in GL_n(F)$ s.t $B=P^{-1}AP$. 定义

$$\begin{aligned} \phi: \ & V_A^\lambda \longrightarrow V_B^\lambda \\ & \vec{x} \longmapsto P^{-1}\vec{x}. \end{aligned}$$

验证 ϕ 同构即可.

(良定义) $\because B=P^{-1}AP$, $\therefore BP^{-1}=P^{-1}A$. 对 $\forall \vec{x}\in V_A^\lambda$,

$B(P^{-1}\vec{x})=(BP^{-1})\vec{x}=(P^{-1}A)\vec{x}=P^{-1}(A\vec{x})=P^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda(P^{-1}\vec{x})$.

于是, $\phi(\vec{x})=P^{-1}\vec{x}\in V_B^\lambda$. 映射 ϕ 良定义. 线性由矩阵乘法得到.

$$\text{定义: } \begin{aligned} \psi: \ & V_B^\lambda \longrightarrow V_A^\lambda \\ & \vec{x} \longmapsto P\vec{x} \end{aligned}$$

ψ 是良定义: $PP^{-1}=P^{-1}P=E$, $\therefore$ $\phi\circ\psi$ 和 $\psi\circ\phi$ 都是恒同映射.

故 ϕ 是线性同构. $\dim V_A^\lambda = \dim V_B^\lambda$ $\square$