# 第十三周作业

1. 解：(1) $\chi_A(t)=|tE-A|=(t-2)(t-4)^2$

$\chi_B(t)=|tE-B|=(t-2)(t-4)^2$

(2) 由 Hamilton – Cayley 定理，$\mu_A|\chi_A$，$\mu_B|\chi_B$.

计算可得 $\mu_A(t)=(t-2)(t-4)$，$\mu_B(t)=(t-2)(t-4)^2$

(3). $J_A$：法一：2 代数重数是 1，4 代数重数是 2.

由代数重数 ≥ 几何重数可知 2 的几何重数也是 1.

$\because \text{rank}(4E-A)=1 \quad \therefore \dim V^4=3-1=2 \quad \therefore$ 4 的几何重数是 2

$$\therefore J_A=\begin{pmatrix} J_1(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(4) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

法二：$\because \mu_A=(t-2)(t-4)$

由可对角化判别法 V 可知 A 可对角化，则

$$J_A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$J_B$：$\text{rank}(2E-B)=2 \Rightarrow \dim V^2=1$.

$\text{rank}(4E-B)=2 \Rightarrow \dim V^4=1$.

2 代数重数是 1，几何重数也是 1

4 代数重数是 2，几何重数是 1.

$$\therefore J_B=\begin{pmatrix} J_1(2) & 0 \\ 0 & J_2(4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A=J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$. 求 $\mu_A$, $\chi_A$, $A^k$. 证：$n>1$, $A$不可对角化.

解：$\chi_A=|tE-A|=(t-\lambda)^n \Rightarrow \mu_A \mid \chi_A$.

$$(A-\lambda E)^m=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}^m$$

若 $m<n$, 则 $(A-\lambda E)^m=$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad m+1 \\ \begin{pmatrix}0 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0\end{pmatrix}\end{array} \neq 0.$$

$\therefore \mu_A=(t-\lambda)^n$

$$A^k=(\lambda E+J_n(0))^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}(J_n(0))^i=\lambda^k E+\binom{k}{1}\lambda^{k-1}J_n(0)+\cdots+(J_n(0))^k$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k\end{pmatrix}$$

若 $k<n$, 则

$$A^k=\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad 第k+1列 \\ \begin{pmatrix}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & & & \lambda^k\end{pmatrix}\end{array}$$

若 $k\geq n$, 则

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k\end{pmatrix}$$

下证：$n>1$, $A$不可对角化.

若$A$可对角化, 则 $\dim V^{\lambda}=n$. 即 $\operatorname{rank}(A-\lambda E)=0$.

$\because A-\lambda E=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$ $\therefore \operatorname{rank}(A-\lambda E)=n-1>0$ 矛盾

$\therefore n>1$时$A$不可对角化

3. 解 (1) $\because \operatorname{rank}(A-3\varepsilon)=2 \quad \therefore \dim V^3 = \dim(\ker(A-3\varepsilon)) = 5-2 = 3.$

$\therefore$ $J_A$ 中以3为特征值的 Jordan 块有3块. 且3的代数重数为4.

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

(2). $\operatorname{rank}(A-3\varepsilon)=1$ 时, $\dim V^3 = 4$.

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$ 唯一

$\operatorname{rank}(A-3\varepsilon)=3$ 时, $\dim V^3 = 2$.

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$ 或 $$J_A = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$ 不唯一

$\operatorname{rank}(A-3\varepsilon)=4$ 时, $\dim V^3 = 1$.

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$ 唯一.

4. 证：$\boxed{\text{方法一}}$：设$U$是$V$的循环子空间且 $U=U_1\oplus U_2$，其中$U_1,U_2$是$A$-子空间

$\because U$是循环子空间 $\therefore \exists \vec{v}\in V$ s.t. $U=F[A]\cdot\vec{v}=\{p(A)(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$

$\because U=U_1\oplus U_2$ $\therefore \exists!\ \vec{v_1}\in U_1,\ \vec{v_2}\in U_2$ s.t. $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

下证 $U_1=F[A]\cdot\vec{v_1}$，$U_2=F[A]\cdot\vec{v_2}$.

证 $U_1=F[A]\cdot\vec{v_1}$：

"$\subset$" $\forall \vec{u}\in U_1\subset U$. $\exists \vec{u}\in U_1,\ \vec{0}\in U_2$ s.t. $\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}$. ①

又$\because U=\{p(A)(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$ $\therefore \exists f\in F[t]$ s.t.

$\vec{u}=f(A)(\vec{v})=f(A)(\vec{v_1})+f(A)(\vec{v_2})$ ②

$\because U_1$是$A$-不变的. $\therefore \vec{v_1}\in U_1\Rightarrow A(\vec{v_1}),\dots,A^k(\vec{v_1})\in U_1\Rightarrow f(A)(\vec{v_1})\in U_1$.

同理 $f(A)(\vec{v_2})\in U_2$

由直和分解唯一性和①,②可得. $f(A)(\vec{v_1})=\vec{u}$，$f(A)(\vec{v_2})=\vec{0}$

故 $\forall \vec{u}\in U_1$，$\exists f(t)$ s.t. $\vec{u}=f(A)(\vec{v_1})$. $\Rightarrow U_1\subset F[A]\cdot\vec{v_1}$.

"$\supset$" $\vec{v_1}\in U_1$，且$U_1$是$A$-子空间 $\therefore A^k(\vec{v_1})\in U_1$，$\forall k\in\mathbb{N}$.

$\therefore \forall p\in F[t]$，$p(A)(\vec{v_1})\in U_1\Rightarrow F[A]\cdot\vec{v_1}\subset U_1$.

由此可得 $U_1=F[A]\cdot\vec{v_1}$. 即$U_1$是循环子空间.

同理可证 $U_2=F[A]\cdot\vec{v_2}$. 即$U_2$也是循环子空间.

5. $A^N=E\Leftrightarrow A$可对角化且特征值均为$N$次单位根.

证："$\Rightarrow$"设 $f(t)=t^N-1$. 则 $f(A)=0$. $\Rightarrow \mu_A(t)\mid f(t)$ $\because f(t)$的根两两不同.

$\therefore \mu_A$的根两两不同 $\therefore A$可对角化. 又$\because$特征根也是$f(t)$的根 $\therefore$是$N$次单位根.

"$\Leftarrow$" 设 $A\sim_s\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ $\lambda_i$为$N$次单位根. i.e. $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t.

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\Rightarrow A^N=P\begin{pmatrix}\lambda_1^N&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^N\end{pmatrix}P^{-1}=PE_nP^{-1}=E_n.$$

6. $\dim_F V=n$. $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m\in\mathcal{L}(V)$. 证：如果 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$ 都可对角化，且两两可交换，则 $V$ 中存在一组基，使得 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$ 在此基下矩阵都是对角阵.

证：(归纳法) 对 $V$ 的维数 $n$ 进行第二数学归纳法证明

$n=1$，设 $V=\langle a\rangle$，$\mathcal{A}_i$ $(i=1,\cdots,m)$ 在 $V$ 的基 $a$ 下矩阵都是 1 阶的，从而是对角的，命题成立.

假设对于维数 $<n$ 的线性空间命题成立. 下面看 $n$ 维的情形.

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}_1$ 所有不同特征值. $\because \mathcal{A}_1$ 可对角化 $\therefore$

$$V=V^{\lambda_1}\oplus V^{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_s}. \qquad (*)$$

若 $s=1$，则 $V=V^{\lambda_1}$，从而 $\mathcal{A}_1=\lambda_1\mathcal{E}$ 是数乘算子，它在任何一组基下矩阵都是 $\lambda_1 E$. 从而可以不必考虑 $\mathcal{A}_1$，转而去考虑 $\mathcal{A}_2$.

(Note: 若 $V=V^{\lambda_1}$, i.e. $\forall \vec{v}\in V$. $(\lambda_1E-A)\vec{v}=0 \Rightarrow A\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \mathcal{A}$ 数乘算子)
$A$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $V$ 某组基下矩阵

因此不妨设 $s\geq 2$. 任给 $j\in\{1,2,\cdots,s\}$. $\because \mathcal{A}_i$ 与 $\mathcal{A}_1$ 可交换，

$\therefore V^{\lambda_j}$ 是 $\mathcal{A}_i$ 一子空间，$\therefore \mathcal{A}_i|_{V^{\lambda_j}}\in\mathcal{L}(V^{\lambda_j})$ $i=1,2,\cdots,m$.

$\because \mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_m$ 两两可交换 $\therefore \mathcal{A}_1|_{V^{\lambda_j}},\mathcal{A}_2|_{V^{\lambda_j}},\cdots,\mathcal{A}_m|_{V^{\lambda_j}}$ 两两可交换. 设 $\mathcal{A}_i|_{V^{\lambda_j}}$ 的极小多项式为 $m_{ij}(t)$. 由 $(*)$ 可得 $\mathcal{A}_i$ 极小多项式 $m_i(t)$ 为

$$m_i(t)=\operatorname{lcm}(m_{i1}(t),m_{i2}(t),\cdots,m_{is}(t))$$

$\because \mathcal{A}_i$ 可对角化，$\therefore \mathcal{A}_i$ $m_i(t)$ 在 $F[t]$ 中可分解为两两互素的一次因子之积

由 $m_{ij}(t)\mid m_i(t)$，$j=1,\cdots,s$ 可知 $m_{ij}(t)$ 在 $F[t]$ 中可分解为两两互素的一次因子之积. $\therefore \mathcal{A}_i|_{V^{\lambda_j}}$ 可对角化，$i=1,2,\cdots,m$.

$\because \dim V^{\lambda_j}<\dim V=n$. $\therefore$ 对 $V^{\lambda_j}$ 上线性算子 $\mathcal{A}_1|_{V^{\lambda_j}},\mathcal{A}_2|_{V^{\lambda_j}},\cdots,\mathcal{A}_m|_{V^{\lambda_j}}$

可以用归纳假设得，存在$V^{\lambda_j}$一组基 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jn_j}$ s.t.

$\mathcal{A}_1|_{V^{\lambda_j}}, \mathcal{A}_2|_{V^{\lambda_j}}, \cdots, \mathcal{A}_m|_{V^{\lambda_j}}$ 在此基下的矩阵 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{mj}$ 都是对角矩阵，于是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_m$ 在$V$的基

$$\underbrace{\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n_1}}_{V^{\lambda_1}\text{基}},\underbrace{\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2n_2}}_{V^{\lambda_2}\text{基}},\cdots,\underbrace{\alpha_{s1},\alpha_{s2},\cdots,\alpha_{sn_s}}_{V^{\lambda_s}\text{基}}$$

下的矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 分别是

$$A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & & & O\\ & A_{12} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{1s}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}A_{21} & & & O\\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{2s}\end{pmatrix},\quad\cdots$$

$$A_m=\begin{pmatrix}A_{m1} & & & O\\ & A_{m2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{ms}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_1, A_2, \cdots, A_m$ 都是对角矩阵.

由第二数学归纳法原理，对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$，命题成立.

Note:

1. $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 则：如果$V^{\lambda}$是$\mathcal{A}$的特征子空间，则 $V^{\lambda}$是$\mathcal{B}$-不变的.

Pf: 法一：$\forall x\in V^{\lambda}$, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(x))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(x))=\mathcal{B}(\lambda x)=\lambda\mathcal{B}(x)\Rightarrow\mathcal{B}(x)\in V^{\lambda}$
$\Rightarrow V^{\lambda}$是$\mathcal{B}$不变子空间

法二：$V^{\lambda}=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$, $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$.

由第二章第三讲引理5.4.可得 $V^{\lambda}$是$\mathcal{B}$-不变的.

引理5.4：$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, 则 $\ker(\mathcal{B})$和$\operatorname{im}(\mathcal{B})$是$\mathcal{A}$-不变的.

2. 第二章第三讲 Th 5.9：

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$U_1,\cdots,U_k$ 是非平凡 $\mathcal{A}$-子空间满足 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$.

设 $Z_i$ 是 $U_i$ 一组基，$i=1,\cdots,k$. 则 $\mathcal{A}$ 在 $V$ 的基底 $Z_1\cup\cdots\cup Z_k$ 下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots & A_k \end{pmatrix}$$

其 $A_i$ 是 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在 $Z_i$ 下矩阵，$i=1,2,\cdots,k$，进而 $\mu_{\mathcal{A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}},\cdots,\mu_{\mathcal{A}_{U_k}})$.

初补充.

习题4：$\boxed{方法二}$：记 $U$ 是 $V$ 的循环子空间且 $U=U_1\oplus U_2$，其中 $U_1,U_2$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

设 $\dim(U)=d$，$\dim(U_1)=d_1$，$\dim(U_2)=d_2$. 则 $d=d_1+d_2$.

设 $\mathcal{A}$ 限制在 $U,U_1,U_2$ 上的极小多项式分别为 $\mu,\mu_1,\mu_2$.

要证 $U_1,U_2$ 是循环子空间，只需证 $\deg(\mu_1)=d_1$，$\deg(\mu_2)=d_2$ 即可.

$\because$ $U$ 是循环子空间 $\therefore \dim(U)=\deg(\mu)=d$.

$\because$ $U_1,U_2$ 为 $\mathcal{A}$-子空间，$\therefore \mu=\mathrm{lcm}(\mu_1,\mu_2)\Rightarrow \deg(\mu)\le\deg(\mu_1)+\deg(\mu_2)$

$\because \mu_1\mid\chi_{\mathcal{A}|U_1}$ $\therefore \deg(\mu_1)\le\deg(\chi_{\mathcal{A}|U_1})=\dim(U_1)=d_1$

同理 $\deg(\mu_2)\le d_2$. 则 $d_1+d_2\le\deg(\mu_1)+\deg(\mu_2)\le d_1+d_2$

$\Rightarrow \deg(\mu_1)=d_1$，$\deg(\mu_2)=d_2$.