

第十三次习题课

一. 作业中的问题及例子补充

1. 解: 计算得 $\chi_A = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$

$$t=2: (2E-A)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t=3: (3E-A)\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由对角化得 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

其中 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

于是 $P^{-1}AP P^{-1}AP \underbrace{\dots}_{m-3\text{次}} P^{-1}AP = P^{-1}A^m P = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix}$

故 $A^m = P \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{pmatrix} P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 2^{m+1}-3^m & -2^{m+1}+2\cdot 3^m \\ 2^m-3^m & -2^m+2\cdot 3^m \end{pmatrix}$$

第二个同理: $\chi = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$.

由对角化得 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^m = P \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{m+1} + 2 \cdot (-1)^m & 2^{m+1} - 2 \cdot (-1)^m \\ 2^m + (-1)^{m+1} & 2^{m+1} - (-1)^{m+1} \end{pmatrix}$$

2. (1) 计算得

$$\chi_A(t) = (t-5)(t+1)^2, \quad \chi_B(t) = (t-10)(t-1)^2$$

若零矩阵 A . 因为 5 的代数重数等于 1, 所以 $\dim(V^5) = 1$.

$$\text{rank}(-E - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \dim(V^{-1}) = 1.$$

由对角化判别法 (关于特征子空间). A 不能对角化.

(2) 三阶矩阵有 3 个不同的特征值: 2, $1+i$, $1-i$, 因此 A 可对角化.

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1+2i \\ -1 & -1+i & -1-i \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

3. (1) 幂零矩阵一定有特征值, 并且它的特征值一定是 0.

(2) 不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化.

证: (1) 设 A 是数域 F 上的 n 阶幂零矩阵, 其幂零指数为 l . 则 $A^l = 0$.

于是 $|A|^l = 0$. 从而 $|A| = 0$.

因此 $|0I - A| = |-A| = (-1)^n |A| = 0$. 0 是 A 的一个特征值.

设 λ 是 A 的一个特征值. 则存在 $\vec{x} \in F^n$ 且 $\vec{x} \neq 0$, 使得 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

两边左乘 A 得, $A^2\vec{x} = A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda^2\vec{x} \dots$

$$A^l\vec{x} = \lambda^l\vec{x}.$$

由于 $A^l = 0$. 因此 $\lambda^l\vec{x} = 0$. 由于 $\vec{x} \neq 0$, $\lambda^l = 0$. 从而 $\lambda = 0$.

(2) $A \neq 0$. 设 $\text{rank}(A) = r$. 由第一问知: A 的特征值有且只有 0.

齐次线性方程组 $(0I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间 W_0 的维数等于

$n - \text{rank}(-A) = n - r$. 由于 $r > 0$, 因此 $\dim W_0 < n$.

从而 A 不能对角化.

0 所对应的特征子空间 V^0

□.

eg 1. 幂等矩阵一定具有特征值, 并且它的特征值是 1 或者 0.

证: 设 A 是数域 F 上的 n 阶幂等矩阵. 如果 λ_0 是 A 的特征值, 那么有

$$\vec{x} \in F^n \text{ 且 } \vec{x} \neq 0 \text{ s.t. } A\vec{x} = \lambda_0 \vec{x}.$$

$$A^2 \vec{x} = \lambda_0^2 \vec{x} \Rightarrow \lambda_0 \vec{x} = \lambda_0^2 \vec{x} \text{ 从而 } (\lambda_0 - \lambda_0^2) \vec{x} = 0.$$

由于 $\vec{x} \neq 0$, 因此 $\lambda_0 - \lambda_0^2 = 0$.

设 $\text{rank}(A) = r$. 若 $r = 0$ 则 $A = 0$. 此时 0 是 A 的特征值, 1 不是.

若 $r = n$, 则 $A = I$, 此时 1 是, 0 不是.

若 $0 < r < n$. 则 A 不满秩, 从而 $|A| = 0$. 0 是 A 的一个特征值.

又由于 A 是幂等矩阵.

$$\text{rank}(I - A) = n - \text{rank}(A) < n. \text{ 从而 } |I - A| = 0.$$

于是 1 也是 A 的一个特征值.

注: 可逆矩阵特征值不为零.

eg 2. 证明: 幂等矩阵一定可对角化, 并且如果 n 级幂等矩阵 A 的秩为 r ($r > 0$),

那么
$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证: 若 $r = n$, 则 A 可逆. 从 $A^2 = A \Rightarrow A = I$. 成立.

若 $r = 0$, $A = 0$. 成立.

若 $0 < r < n$. 由 eg 1. 知幂等矩阵的全部特征根 0, 1.

0: $(0I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间 $\underbrace{W_0}_{(V^0)}$ 的维数等于 $n - \text{rank}(-A) = n - r$.

由于 A 是幂等矩阵, 因此 $\text{rank}(A) + \text{rank}(I - A) = n$.

从而 $\text{rank}(I - A) = n - r$.

1: $(I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间 $\underbrace{W_1}_{(V^1)}$ 的维数 $n - \text{rank}(I - A) = n - (n - r) = r$.

$$\dim W_0 + \dim W_1 = (n - r) + r = n.$$

故 A 可对角化.

A的相似标准形中, 特征值1在对角线上出现的次数等于 λ_1 的维数 r . 特征值0在对角线上出现的次数等于 λ_1 的维数 $n-r$.

因此

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

eg 3. 证明: 数域F上幂等矩阵的秩等于它的迹。

证: 设A是数域F上 n 阶幂等矩阵, 且 $\text{rank}(A) = r > 0$.

则由eg 2 得 $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

由于相似的矩阵有相等的迹, 那么

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = \text{rank}(A).$$

若 $A=0$, 则 $\text{tr}(0) = 0 = \text{rank}(0)$.

eg 4. 设 $A_1, A_2, \dots, A_s$ 都是数域F上的 n 级矩阵. 证明: 如果

$$\sum_{i=1}^s A_i = I, \text{ 且 } A_1, A_2, \dots, A_s \text{ 都是幂等矩阵, 那么 } \sum_{i=1}^s \text{rank}(A_i) = n.$$

证: 由于 $\sum_{i=1}^s A_i = I$, 因此 $\text{tr}(\sum_{i=1}^s A_i) = \text{tr}(I)$ 从而 $\sum_{i=1}^s \text{tr}(A_i) = n$.

由eg 2. $\sum_{i=1}^s \text{rank}(A_i) = \sum_{i=1}^s \text{tr}(A_i) = n$.

eg 5. 放这里证.

4. 解. 只需验证 $\vec{v}, A(\vec{v}), A^2(\vec{v})$ 线性无关即可.

5. 设 $A, \beta \in \mathcal{L}(V)$, A 是循环算子, $A\beta = \beta A$. 证明: $\beta \in F[A]$.

证: 设 $V = F[A] \cdot \vec{v}$, 则 $\vec{v}, A(\vec{v}), \dots, A^{n-1}(\vec{v})$ 是 V 的一组基. (9.2 (iii)).

命题 9.2 (i) 知 $\exists f(x)$ s.t. $\beta(\vec{v}) = f(A)(\vec{v})$. 则对 $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\beta(A^k(\vec{v})) \stackrel{(\beta A = A\beta)}{=} A^k(\beta(\vec{v})) = A^k f(A)(\vec{v}) = f(A)(A^k(\vec{v})).$$

于是 β 和 $f(A)$ 在上述基底中每个向量下的像相同.

$$\beta = f(A).$$

根据线性映射基本定理 II: $V: \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, W: \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n, \phi: V \rightarrow W$

$$\text{s.t. } \phi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \dots, \phi(\vec{v}_n) = \vec{w}_n.$$

eg 5. 设 $n > 1$ 且 $\phi: M_n(F) \longrightarrow M_n(F)$

$$A \longmapsto A^t$$

(i) 验证 ϕ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上线性算子

$$\forall \alpha, \beta \in F, A, B \in M_n(\mathbb{R}), (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$$

(ii) 求 $\text{rank}(\phi)$

$$\because \phi^2 = \text{id} \quad \therefore \phi \text{ 可逆, 于是 } \text{rank}(\phi) = n^2$$

(iii) 计算 ϕ 的特征根和特征子空间.

a. $\text{char}(F) \neq 2, \therefore n > 1 \quad \therefore \phi$ 不是数乘算子

$\mu_\phi = t^2 - 1$ 由推论 9.8 [ϕ 在 F 的谱为极小多项式的根]

$$\text{spec}_F(\phi) = \{-1, 1\}.$$

注意到 $A \in SM_n(F) \iff \phi(A) = A$. 于是 1 是特征根且 $V' = SM_n(F)$.

类似的, $A \in SS M_n(F) \iff \phi(A) = -A$.

b. $\text{char}(F) = 2, \mu_\phi = (t-1)^2 \quad \text{spec}_F(\phi) = \{1\}.$

$A \in SM_n(F) \iff \phi(A) = A$. 1 是特征根 $V' = SM_n(F)$.

(iv) 确定 ϕ 是不是可对角化.

其实由 (iii) 可直接得到 $\text{char}(F) \neq 2 \quad M_n(F) = SM_n(F) \oplus SS M_n(F)$.

$\text{char}(F) = 2$ 不可对角化.

(或参考讲义 eg 8.23 + 8.24)

eg 6. 设 $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\alpha\beta = \beta\alpha$. 证明:

如果 V^λ 是 α 的特征子空间, 则 V^λ 是 β 不变的.

证: 方法一: (定义来证)

设 $\vec{x} \in V^\lambda$, 则

$$\alpha(\beta(\vec{x})) = \beta(\alpha(\vec{x})) = \beta(\lambda\vec{x}) = \lambda(\beta(\vec{x}))$$

$\beta(\vec{x}) \in V^\lambda$. 即 V^λ 是 β -不变的.

6. 证明: $|\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$.

因此 A 的全部特征值是 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

(i) 如果 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 两两不同, 那么 A 有 n 个不同特征值,

因此 A 可对角化.

(ii) $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, 那么 A 有且只有一个特征值 a_{11}

$(a_{11}I - A)\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间 W 的维数 (即特征值 a_{11} 所对应的特征子空间)

||

$$n - \text{rank}(a_{11}I - A).$$

由于至少有一个 $a_{kl} \neq 0$ ($k \neq l$) 因此 $a_{11}I - A \neq 0$

$$\dim(W) = n - \text{rank}(a_{11}I - A) < n$$

不可对角化.

□.

二. 课程内容回顾及补充扩展知识

10. 循环子空间的分解

1. 循环子空间的分解: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l \in V \setminus \{\vec{0}\}$ s.t.

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_1) \oplus \dots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_l).$$

$\Rightarrow$ (H-C 加细版).

$\Rightarrow$ 不可分条件.

eg 7. 设 $n \geq 2$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(F^n)$ 在标准基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) 确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}$ -循环的, 如果是, 求 F^n 的一个关于 $\mathcal{A}$ -的循环向量,

确定 F^n 是不是 $\mathcal{A}$ -不可分的.

解: (i) 设 $B \in F^{m \times n}$, 则

$$BA = (\vec{B}^{(1)}, \vec{B}^{(2)}, \dots, \vec{B}^{(m)}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{B}^{(2)}, \vec{B}^{(3)}, \dots, \vec{B}^{(n)}, \vec{0}_n).$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = (\vec{A}^{(3)}, \vec{A}^{(4)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \vec{0}_n, \vec{0}_n, \vec{0}_n) \dots$$

$\mathcal{U}_A = t^n$, F^n 是 $\mathcal{A}$ -循环空间. (Th 9.11): V 是 $\mathcal{A}$ -循环, $\deg(\mathcal{U}_A) = \dim(V)$.

设 $C \in F^{n \times m}$. 则

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_{m-1} \end{pmatrix}$$

令 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 是 F^n 的标准基. 则

$$\vec{e}_2 = A\vec{e}_1, \vec{e}_3 = A\vec{e}_2 = A^2\vec{e}_1, \dots$$

于是 $\vec{e}_1$ 是 $\mathcal{A}$ -循环向量. 由引理 10.6 $\begin{cases} F^n \text{ 是 } \mathcal{A}\text{-循环} \\ \mathcal{U}_A \text{ 是某个不可约多项式幂次} \end{cases} \Rightarrow \text{不可分}.$

11. 复数域上的 Jordan 标准型. (注: 此节 V -不可分).

1) 注解 11.2 的 5 条性质 a. b. c. d. e.

2) 注解 11.6 的 6 条性质 a. b. c. d. e. f.